توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

# کتاب جبر

برای سال دوم دبیرستانها

بها در تمام کشور ۱۶ ریال



۱۳۲۴

بنگاه علمی

*With the Compliments*

*of*

*The Cultural Counsellor*

*of*

*The Iranian Embassy*

*New Delhi.*

# فصل اول

## حرفها و نشانه ها و دستورهای جبری

۱- در علم حساب عدد برای سنجش یک چندی (کمیت) است نسبت به یکه (واحد) آن چندی مثلاً هرگاه بگوئیم درازای فلان پارچه ۷ متر است عدد ۷ مینماید که این درازا ۷ برابر یکه درازا یعنی متر است و همچنین هرگاه بگوئیم وزن این روغن $2\frac{3}{10}$ کیلو است عدد $2\frac{3}{10}$ مینماید که این وزن ۲ یکه و $\frac{3}{10}$ یکه وزن را دربردارد.

۲- چنانکه میدانیم در مسئله های حساب عدد هائی مانند عدد های بالا (۷ و $2\frac{3}{10}$) بکار میرود. مانند مسئلهٔ زیر:

مزد کارگری در روز ۱۲ ریال است پس از ۵ روز چقدر باو میرسد؟

و نیز در بهره کاری (مرابحه) مسئله هائی در روی عدد های مختلف که نمایش سرمایه و زمان و نرخ و سود است طرح میشود مانند مسئلهٔ زیر:

مطلوبست سود ۲۵۰۰ ریال سرمایه از قرار نرخ ۶٪ در مدت دوسال. که پس از محاسبهٔ مختصری نتیجه میشود:

$$\frac{۲۵۰ \times ۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۳۰ \text{ ریال}$$

و میدانیم که این مسئله و مسئله های مانند آنرا بوسیلهٔ دستور

$$i = \frac{a \times r \times t}{100} \quad (1)$$

حل میکردیم که در آن i بجای سود و a بجای سرمایه و r بجای نرخ و t بجای زمان گذرانده شده و معنای آن این است :

## سود مساوی است با سرمایه ضرب در نرخ ضرب در زمان تقسیم بر ۱۰۰

از روی این دستور نه تنها مسئلهٔ بالا را میتوان حل نمود بلکه هر مسئله ای که مانند آن باشد نیز از روی این دستور حل میشود چنانکه اگر سرمایه ۱۲۰ ریال و نرخ ۹٪ و زمان ۵ سال باشد از روی دستور (۱) سود چنین میشود

$$= \frac{a \times r \times t}{100} = \frac{۱۲۰ \times ۹ \times ۵}{۱۰۰} = ۵۴ \text{ ریال}$$

در مسئلهٔ اول a مساوی ۲۵۰ و در مسئلهٔ دوم مساوی ۱۲۰ میباشد و در مسئله های دیگر ممکن است بجای سرمایه های دیگر بکار رود همچنین است حرفهای دیگر که در دستور (۱) بکار رفته

بنابرین از بکار بردن حرفها در مسئله ها دستورهائی مانند دستور (۱) بدست میآید و از روی این دستورها که رابطه هائی هستند شامل حرف و عدد و نشانه (علامت) محاسبه ها ساده شده و مسئله ها باسانی حل میگردد.

مثال - میدانیم مساحت مستطیل مساوی حاصل ضرب قاعده و ارتفاع آنست - اگر اندازهٔ قاعده را از روی یکه درازا مثلا سانتیمتر، به a و اندازهٔ ارتفاع را از روی همان یکه،

$b$ و مساحت را (بحسب یک مساحت مثلاً سانتیمتر مربع) به $S$ بنامیم این دستور $S=a\times b$ نتیجه میشود که از روی آن میتوان مساحت مستطیلی را بدست آورد.

۳- از آنچه گفته شد معلوم میشود هرگاه در مسئله ای بجای عددها حرف گذاشته شود آن مسئله صورت کلی پیدا میکند و از حل آن میتوان مسئله های زیادی مانند آن را حل نمود و منظور عمده علم جبر و مقابله نیز همین است یعنی **ساده نمودن محاسبه ها و عمومیت دادن بحل مسئله ها بوسیله بکار بردن حرف ها و نشانه ها**

نشانه ها برای آسان نمودن حل مسئله و حرفها برای عمومیت دادن محاسبه ها بکار میروند

۴- **حرفها** - بیشتر در جبر حرفهای اول الفبای لاتین ($a$ و $b$ و $c$ وغیره) را برای نمایش چندیهای دانسته (معلوم) و حرفهای آخر را ($x$ و $y$ و $z$ وغیره) برای نمایش چندیهای مجهول بکار میبرند.

وقتی که بخواهند چند مقدار مانند هم را بنامند آنها را با یک حرف نموده اختلافشان را با نهادن زبری در بالای کمی بسمت راست و یا شماره ای در زیر کمی بسمت راست مینمایند مثلاً مینویسند $a'$ و $a''$ و $a'''$ ... (بخوانید $a$ زبر یک و $a$ زبر دو وغیره) و یا $a_1$ و $a_2$ ... (بخوانید $a$ زیر یک و $a$ زیر دو وغیره).

۵- **نشانه ها** (علامت ها) - نشانه ها معلوم میکنند عملها یا رابطه هائی که باید بین عددها و حرفها برقرار باشد - مهمترین آنها از اینقرارند:

**الف - نشانه های مخصوص چهار عمل اصلی** - همان نشانه هایست که در حساب

هم بکار میبرند.

+ علامت افزودن عددی بر عدد دیگر است مانند $a+b$ و $2+5$ و $c+12$

- نمایش کاستن عددی از عدد دیگر است مانند $a-b$ و $5-2$ و $x-1$

× مینماید که باید دو عدد در هم ضرب شوند مانند $a\times b$ و $2\times d$

حاصل ضرب دو عدد $a$ و $b$ را چنین نیز نویسند $a\cdot b$ یا $ab$

مانند $d\cdot x$ و $xy$

: یا ـ علامت تقسیم کردن عددی بر عدد دیگر است

مانند $a:b$ و یا $\frac{a}{b}$ و $\frac{x}{3}$ و $\frac{12}{y}$

ب ـ علامتهای مقایسه:

= نمایش مساوی بودن دو مقدار است مانند $a=b$ و $x=2$

$\neq$ علامت اختلاف دو مقدار است مانند

$y\neq 5$ و $a+1\neq a+2$ و $4+3\neq 10$

> یا < ـ برای اینکه بنویسند عددی کوچکتر از عدد دیگر یا بزرگتر از آنست علامت > یا < را بکار میبرند چنانکه $a>b$ یا $b<a$ هردو مینماید که عدد $a$ بزرگتر از $b$ میباشد

مانند $7>3$ و $5<9$

$\geq$ یا $\leq$ این دو علامت را وقتی بکار میبریم که بخواهیم بنویسیم حداقل یا اکثر عددی مانند $a$ مساوی عددی مانند $b$ است مثلاً $a\geq b$ مینماید که عدد $a$ بزرگتر از $b$ و یا مساوی است

کم مساوی باآن میباشد و همین رابطه مینماید که $b$ کوچکتر از $a$ و یا اگر است مساوی باآنست

ج - پرانتزها - وقتی مقدارهائی باشانه های چهار عمل اصلی در داخل پرانتز[۱] ( ) یا گروشه[۲] [ ] و یا آکلاد[۳] { } قرار گرفته باشند حکم مقدار واحد پیدا میکنند و این پرانتزها حاصل تمام عملهای بین این مقدارها را مینمایند مثلاً (۵-۳) + $a$ مینماید که باید بر $a$ حاصل پرانتز یعنی ۲ را افزود.

یادآوری - برای حساب کردن هر عبارتی که در آن جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید نخست عمل های ضرب و تقسیم را بترتیبی که نوشته شده انجام داده سپس جمع و تفریق نمود مثلاً

۲۷ - ۱۸ : ۶ × ۲ + ۵ × ۳ =

۲۷ - ۳ × ۲ + ۱۵ =

۲۷ - ۶ + ۱۵ = ۳۶

بنابرین عبارت ۵-۸×۲+۷ با (۵-۸) × (۲+۷) تفاوت کلی دارد چه

۷ + ۲ × ۸ - ۵ = ۷ + ۱۶ - ۵ = ۱۸

و (۷ + ۲) × (۸ - ۵) = ۹ × ۳ = ۲۷

تمرین - این عبارتها را حساب کنید

۴۸ : ۶ - ۴ (۷ - ۲) : ۱۰ + ۵ (۴ + ۳ × ۲)

۳۶ : ۴ : ۳ - ۲ (۵ - ۴) : ۶ .

[ ] ـ وقتی بخواهند حاصل عملهای چند پرانتز را بنمایند آنها را در داخل کروشه [ ] قرار میدهند.

چنانکه عبارت [(۵ - ۹) - ۸] × ۳ معلوم میکند که باید عدد ۳ را در حاصل کروشه ضرب نمود. و حاصل کروشه اینطور بدست میآید که از عدد ۸ حاصل پرانتز یعنی ۴ را کم کنیم بنابرین حاصل کروشه مساوی ۴ و عبارت بالا مساوی ۱۲ میشود.

{ } ـ هرگاه مقصود نمایش حاصل عملهای چند کروشه باشد آنها را در داخل علامت آکلاد { } قرار میدهند.

چنانکه از عبارت {[(۵ - ۹) - ۷] ۲ - ۱۵} - ۱۷ معلوم میشود که باید از عدد ۱۷ حاصل آکلاد را کاست. برای محاسبهٔ آکلاد حاصل کروشه یعنی ۳ را در ۲ ضرب مینمائیم و حاصل آن یعنی ۶ را از ۱۵ میکاهیم بنابرین حاصل آکلاد ۹ و عبارت بالا مساوی ۸ میشود

## پرسش های سادهٔ شفاهی

۱ـ عبارتهای زیر را بخوانید

$c - 8 = 5$ ، $x : 2$ ، $a \times 5$ ، $b - 6$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ؛ $d = 2c + 3f$ ؛ $3x - y = 18$

۲ـ در هر یک از عبارتهای پائین چه عملی باید کرد؟

$2a - xy + b$

$\frac{x - 2}{3}$

$\frac{x}{a}-۵(x+y)$ ، $(a+b)(a-b)$

$۲:[a-(۲x+۵)]$

۳- مقصود هر یک از رابطه‌های زیر را بیان کنید

$x<۲a$ $\quad$ $x>۳$ $\quad$ $۲x-۵=ab$

$a-۲b\neq ۳$ $\quad$ $xy>a:۵$ $\quad$ $ab<\frac{۱}{۴}$

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بگویید

$۳(۲+۵)$ $\quad$ $۵(۹-۳):۳$

$(۳+۲)(۹-۷)$ $\quad$ $(۱۲-۸):(۶-۴)$

$\sqrt{(۲+۵)(۹-۲)}$ $\quad$ $\sqrt{۲۸-۳}:۵$

۵- مقدار عددی عبارت‌های زیر را حساب کنید

$۴h^۲$ وقتی که $h=۴$ یا وقتی که $h=۳$ باشد

$ab^۲$ ، $a=۲$ و $b=۵$ باشد

$(m+n)^۲$ ، $m=۹$ و $n=۴$ باشد

$(a-b)^۲$ ، $a=۴$ و $b=۱$ باشد

$\sqrt{n}-x$ ، $n=۲۵$ و $x=۳$ باشد

۶- در مثلثی $S$ نمایش مساحت و $a$ قاعده و $h$ ارتفاع وارد بر آنست این رابطه را توضیح دهید

$$S=\frac{۱}{۲}ah$$

۷- در مستطیلی $S$ نمایش مساحت و $p$ نصف محیط و $a$ و $b$ ضلع های آن میباشند معنای این دو رابطه چیست؟

$$S = ab \qquad 2p = 2(a+b)$$

۸- $V$ حجم کره و $R$ شعاع آنست از $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ چه میفهمید؟

۹- مجموع دو عدد $a$ و ۳ را نمایش دهید.

۱۰- مجموع دو عدد $a$ و $b$ را نمایش دهید.

۱۱- تفاضل دو عدد $a$ و $b$ را نمایش دهید.

۱۲- تفاوت مزد دو نفر ۲۰ ریال است بوسیله یک تساوی نمایید.

۱۳- بنویسید که $a + 3$ مساوی سه برابر $b$ است.

۱۴- بنویسید که $a + 3$ بزرگتر از دو برابر $b - 3$ است.

۱۵- درستی تساویهای زیر را بازاء مقدارهای مختلف $x$ تحقیق کنید.

$$x + x = 2x$$

$$x + x + 13 = 13 + 2x$$

$$3(x + 3) = 3x + 9$$

## بکار بردن نشانه و حرف

۶- اینک از دو مسئله زیر روشن میشود که چگونه بکار بردن حرف و نشانه سبب آسانی حل مسئله میگردد و در ضمن از حل حسابی مسئله و مقایسه آن با حل جبری برتری علم جبر بر حساب واضح میشود

مسئله ۱- مجموع دو عدد ۲۵ و تفاضل آنها ۱۳ است آن دو عدد کدامند؟

حلّ حسابی- بنا بفرض عدد بزرگتر ۱۳ یکه بیش از عدد کوچکتر است و چون مجموعشان دو دست است پس اگر از این مجموع ۱۳ را کم کنیم مانده یعنی ۱۲ دو برابر عدد کوچکتر میشود و بنابرین عدد کوچکتر نصف ۱۲ یا مساوی ۶ است و چون ۱۳ برآن بیفزائیم عدد بزرگتر بدست میآید

$$۶ + ۱۳ = ۱۹$$

حلّ جبری- عدد کوچکتر را که نمیدانیم به $x$ بنامیم عدد بزرگتر برابر $x + ۱۳$ و مجموعشان مساوی $(۱۳ + x) + x$ یا $۲x + ۱۳$ میشود و بنا بفرض این مجموع ۲۵ است یعنی

$$۲x + ۱۳ = ۲۵$$

چون ۱۳ از دو طرف تساوی کم کنیم حاصل میشود،

$$۲x = ۱۲$$

و از آنجا

$$x = ۶$$

و بنابرین عدد بزرگتر مساوی $۱۹ = ۱۳ + ۶$ میشود.

مسئلهٔ ۲- تفاوت مزد روزانهٔ دو کارگر ۲۰ ریال است و چون ۳ ریال بر مزد روزانهٔ هریک افزوده شود مزد بیشتر ۳ برابر مزد کمتر میشود مزد هریک چند است؟

حلّ حسابی- میدانیم هرگاه بر کاسته و کاهش یاب مقداری مساوی افزوده شود مانده تغییر نمیکند. پس در حقیقت میخواهیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

تفاوت دو عدد ۲۰ و عدد بزرگتر ۳ برابر عدد کوچکتر است از اینجا معلوم میشود که عدد ۲۰ دو برابر عدد کوچکتر است بنابرین عدد کوچکتر مساوی ۱۰ و عدد بزرگتر ۳۰ میباشد که چون از هر یک ۴ کم شود مزد روزانه هر کارگر بدست میآید پس

مزد کوچکتر = ۷ ریال          مزد بزرگتر = ۲۷ ریال

**حل جبری** - چون مزد کمتر را که نمیدانیم $x$ فرض کنیم مزد بیشتر مساوی $x + 20$ میشود حال اگر بهر یک ۳ ریال بیفزائیم بنا بفرض مزد بیشتر سه برابر مزد کمتر میشود یعنی

$$3(x+3) = x + 20 + 3$$

و یا

$$3x + 9 = x + 23$$

از دو طرف تساوی یک دفعه ۹ و یک دفعه $x$ کم کنیم نتیجه میشود

$$2x = 14$$

و از آنجا

$$x = 7$$

یعنی مزد کمتر ۷ ریال است و بنابرین مزد بیشتر مساوی $7 + 20 = 27$ ریال میشود

۷ - از مقایسه حل حسابی و جبری این دو مسئله مخصوصاً از حل مسئله دوم می بینید که در حل هر مسئله برا ه حساب یکرشته عمل هائی بین مقدارهای دانسته انجام میشود که باید از روی فکر صحیح باشد تا بتوانیم بجواب برسیم وعموماً در حل هر مسئله نکته باریکی موجود است که تا آن نکته برنخوریم مسئله حل نمیشود چنانکه در مسئله دوم ثابت ماندن تفاوت دو مزد گرچه نکته ایست آسان ولی همه کس ممکن است متوجه بآن نشود و در صورتیکه در حل جبری لازم نیست باین نکته توجه شود

در جبر راه حل هر مسئله بر این روش است که صورت مسئله را بکمک حرفها و نشانه ها بنویسیم (پرسش های از ۹ تا ۱۳ صفحه ۸) و چنانکه دیدیم بکار بردن حرف و نشانه راه حل مسئله را بصورت ساده و روشن در آورده و بعلاوه بوسیله رابطه های ساده از نوشتن عبارتهای دراز و دردسر دلیل میکاهد.

## بکار بردن حرف برای عمومیت دادن محاسبه ها

۸ - گرچه روش بالا سبب ساده نمودن حل مسئله میشود و بآسانی مجهول بدست میآید ولی در پاسخ مسئله که عددی بیش نیست اثری از عملهائیکه موجب رسیدن به نتیجه شده است موجود نمیباشد بقسمی که برای حل مسئله های مانند آن باید همه عملهای بالا را از سر گرفت تا مجهول مسئله بدست آید.

این نقص را بوسیله بکار بردن حرف از بین برده اند از اینقرار:

مجهولها و همچنین دانسته های یک مسئله را بحرف نمایش داده و مسئله را برحسب دانسته های کلی (حرفی) حل میکنند جواب مسئله که از این راه بدست میآید عبارتیست مشتمل بر کلیه عملهائیکه باید در روی مقدارهای دانسته انجام شود تا مجهول بدست آید. این عبارت را دستور نامند مانند دستور (۱۰) در بهره کاری صفحه (۲).

نخستین فایده دستور عمومیت دادن به حل یک مسئله کلی است که از روی آن میتوان همه مسئله ها را که مانند مسئله کلی بوده و فقط در مقدار عددی دانسته ها اختلاف داشته باشند حل نمود.

برای فهمیدن این مطلب مسئله کلی زیر را حل میکنیم.

مسئله - مجموع دو عدد $S$ و تفاضل آنها $d$ است آن دو عدد کدامند؟

چون عدد کوچکتر را به $x$ و عدد بزرگتر را به $y$ بنامیم این دو تساوی بدست میاید

$$x+y=S$$

$$y-x=d$$

از جمع این دو تساوی خواهیم داشت.

$$2y=S+d$$

و از آنجا $y=\frac{S+d}{2}$ و بنابرین $x=\frac{S-d}{2}$

پس جوابهای مسئله چنین است

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{S-d}{2} \\ y=\frac{S+d}{2} \end{array}\right.$$

یعنی هرگاه مجموع دو عدد $x$ و $y$ مساوی $S$ و تفاضل آنها یعنی $y-x$ مساوی $d$ باشد $y$ مساویست با نصف $S+d$ و $x$ مساویست با نصف $S-d$

از روی این دستور میتوان مسئله های مانند مسئله بالا را حل نمود چنانکه اگر مجموع دو عدد ۱۷ و تفاضل آنها ۹ باشد آن دو عدد عبارتند از:

$$x=\frac{S-d}{2}=\frac{17-9}{2}=4$$

$$y=\frac{S+d}{2}=\frac{17+9}{2}=13$$

۹- فایده های دیگر دستور- بکار بردن دستورهای جبری علاوه برآنکه سبب عمومیت دادن حل مسئله میگردد فایده های دیگری نیز دارا است که در زیر بیان میکنیم.

الف- بکار بردن حرف و نشانه عموماً سبب اختصار در نوشتن یک قضیه و بخاطر سپردن آن میشود

مثلاً بجای اینکه بگوئیم اگر جای سازه (عامل) های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند کافی است این رابطه را بخاطر بسپاریم

$$ab = ba$$

و همچنین بجای اینکه بگوئیم درازای محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد $\pi$ کافی است محیط دایره را بحرف $C$ و شعاع را بیکی از حرفها مانند $R$ نموده این دستور را بنویسیم.

$$C = 2\pi R$$

ب- از یک دستور میتوان دستورهای دیگر بدست آورد

مثال- اگر $v$ نمایش تندی ثابت متحرکی در یکزمان باشد و مدت حرکت $t$ اختیار گردد راهی که متحرک پیمود مساوی $vt$ خواهد بود که چون آنرا به $e$ بنمائیم دستور زیر بدست میآید.

$$e = vt \quad (1)$$

و از این دستور دستورهای $v = \frac{e}{t}$ (۲) و $t = \frac{e}{v}$ (۳) نتیجه میشود

مثلاً اگر ماشینی با تندی ۳۶ کیلومتر در ساعت مدت ۵ ساعت حرکت کرده باشد

راهی که رفته از دستور (۱) بدست میآید:

$$e = vt = 36 \times 5 = 180 \text{ کیلومتر}$$

همچنین اگر اتوموبیلی ۱۶۰ کیلومتر را در ۴ ساعت پیموده باشد تندی آن از دستور (۲) معلوم میشود:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{160}{4} = 40 \text{ کیلومتر در ساعت}$$

وقتی متحرکی مسافت ۴۸ کیلومتر را با تندی ثابت ۹ کیلومتر در ساعت پیموده باشد مدت حرکتش چنین است

$$t = \frac{e}{v} = \frac{48}{9} \text{ ساعت} = \text{۵ ساعت و ۲۰ دقیقه}$$

ج ـ بوسیله ترکیب دو دستور میتوان نتیجه های مهم بدست آورد.

مثلاً اگر $c$ و $c'$ بترتیب محیط های دو دایره بشعاع $R$ و $R'$ باشد این دو دستور را داریم:

$$c = 2\pi R$$

$$c' = 2\pi R'$$

از تقسیم این دو تساوی چنین نتیجه میشود $\frac{c}{c'} = \frac{R}{R'}$

یعنی نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مساوی نسبت بین دو شعاع آنها است

## پرسش های ساده شفاهی

۱ ـ عبارتهای زیر را بوسیله دستورهائی بنمائید:

الف ـ $S$ مجموع دو عدد $a$ و $b$ است

ب ـ از تقسیم $a$ بر $b$ عدد $q$ خارج قسمت و $r$ باقیمانده است

ج- چون در یک برخه برخه‌شمار (صورت) و برخه‌نام (مخرج) را در یک عدد ضرب و یا بر یک عدد تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمیکند

۲- بین دو عدد $a$ و $b$ تساویهای زیر برقرار است هر یک از آنها چه معنائی دارد؟

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) \quad a^2 - b^2$$

۳- تحقیق کنید که تساویهای بالا صحیح است هر چه باشد $a$ و $b$

۴- این عبارتها را حساب کنید وقتیکه $x$ مساوی ۳ و $y$ مساوی ۵ باشد

$$xy^2 \qquad x^2y \qquad \frac{5x}{y}$$

$$\sqrt{x}+y \qquad \sqrt{x+y} \qquad \frac{5x-2y}{5}$$

$$2x^2-y^2 \qquad (y-x)(y+5)$$

$$(y+x)^2 \qquad (y+2x-5)^2$$

## تمرین

۱- هر یک از عبارتهای پائین را حساب کنید

۶ : ۳ + ۳      ۱۳ − (۱۶ − ۷) + ۱۲ − ۵

۲۴ (۲ + ۳) : ۸ − ۱۰      ۹ × ۲۳ − ۴ × ۶ − ۸ : (۵ − ۱)

$۸^{۳} - ۵^{۴}$      (۱۰ − ۳)(۱۶ − ۳ × ۳ + ۸ : ۲)

$$۳ \times ۴۰ - ۶ \times ۲ + ۱۲ \times ۳۵ : ۲^۲ \times ۷ - ۳^۲ + (۵-۲)^۲$$

۲- مقدار عددی $x$ و $y$ را از روی دستورهای

$$y = m^۲ + m - ۱۱ \quad \text{و} \quad x = A^۲ - ۲A - ۵$$

بدست آورید وقتی که $A = ۱۰$ یا $A = ۸$ یا $A = ۵$ باشد

و $m = ۱۲$ یا $m = ۱۰$ یا $m = ۱۵$ باشد

۳- عبارت $\sqrt{x-y} - (x-y)$ را حساب کنید

وقتیکه $x = ۵$ و $y = ۳$ باشد

۴- در عبارت

$$\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

بجای $a$ و $b$ دو عدد بدلخواه گذارده مقدار عددی آنرا حساب و تحقیق کنید که مقدارهای

$a$ و $b$ هرچه باشد مقدار عددی این عبارت ۳ است

۵- $a$ و $b$ و $c$ نمایش درازای (طول) پهلوها (ضلعها)ی یک سه بر (مثلث)،

و $p$ نیمه پیرامون (محیط) و $S$ نمایش مساحت آن باشد مطلوبست محاسبه مساحت سه بر از روی

دستور $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

در حالتهای مخصوص زیر

$a = b = c = ۲۵$

$a = b = ۳۰$ و $c = ۵۰$

$a = ۷۵$ $b = ۶۵$ $c = ۴۰$

۷- باغی است بشکل مستطیل بدرازای $b$ و پهنای $c$ که دور آنرا دیواری بکلفتی $a$ و بلندی $d$ کشیده اند و درمیان باغ حوضی است بشکل دایره بشعاع $R$ حساب کنید حجم دیوار و سطح زمین باغ را

اول از روی $a$ و $b$ و $c$ و $d$ و $R$

دوم در این حالات: $R = ۴٫۱۰$   $d = ۱٫۲۵$   $a = ۰٫۴۰$ متر   $c = ۳۸$ متر   $b = ۸۵$ متر

$R = ۵٫۲$   $d = ۱٫۵$   $a = ۰٫۳۵$   $c = ۴۰$ متر   $b = ۱۱۰$ متر

۸- مطلوبست تعیین دستور کلی برای محاسبهٔ دو عدد وقتی که مجموعشان را بدانیم و یکی دو برابر دیگری باشد. مسئله های ۹ تا ۱۳ را بدو راه حساب و جبر حل نموده و نیز بوسیلهٔ بکار بردن حروف بجای دانستنیهای مسئله دستورهای کلی بدست آورید.

۹- پدری ۵۰ سال دارد و پسرش ۱۴ سال پس از چه مدت سال پدر سه برابر سال پسر میشود؟

۱۰- عددی پیدا کنید که $\frac{1}{3}$ آن بعلاوهٔ $\frac{1}{4}$ آن مساوی ۷ باشد.

۱۱- مطلوبست تعیین عدد دو پیکری (دو رقمی) بقسمی که مجموع دو پیکرش ۹ بوده و چون آنرا از وارونه اش کم کنند عدد ۲۷ بدست آید.

۱۲- شخصی مبلغی از سرمایه اش را از قرار ۵٪ و باقی را که ۴۶۲۰ ریال بیش از مبلغ اولی است از قرار ۶٪ برابحه میگذارد سود سه ماههٔ سرمایهٔ دوم ۴۹٫۴ ریال بیش از سود سه ماههٔ سرمایهٔ اول بوده است مطلوبست تعیین مبلغ سرمایه.

۱۳- چه مقدار نقرهٔ ویژه باید با ۱۵۰۰ گرم شمش بعیار ۸۲۵ر. آمیخته شود تا عیار شمش حاصل ۸۷۵ر. گردد؟

۱۴- میخواهیم مبلغ ۱۵۶۰ ریال را بدو قسمت کنیم بطوریکه یکی از آنها دو برابر دیگری شود.

۱۵- شخصی چند متر پارچه از قرار هر ۵ متری ۷ ریال خریده و از قرار هر ۷ متری ۱۱ ریال میفروشد و بدین ترتیب ۱۸ ریال سود میبرد چند متر پارچه خریده است؟

۱۶- شخصی مدت یکساعت و ۲۵ دقیقه با تندی ثابتی راه میرود و پس از آن مدت ۱۲ دقیقه با دو برابر تندی پیش حرکت میکند بر روی هم ۸۱۷۵ متر راه رفته است معین کنید تندی حرکتش را در مدت اول و مدت دوم

۱۷- پیاده ای از منزل خود در تهران برای رفتن بیک نقطه ای از شمیران ساعت ۵ صبح حرکت میکند و ساعتی ۴۵۰۰ متر میرود و پس از نیمساعت توقف در آن نقطه برمیگردد و در برگشتن هر ساعتی ۶۰۰۰ متر می پیماید و نیمساعت بعد از ظهر بمنزل خود میرسد معین کنید اول فاصله منزل آن شخص را از آن نقطه دوم در چه ساعتی بمقصد رسیده است!

۱۸- فاصله دو کان زغال ۳۲۰ کیلومتر است هر خروار زغال در کان نخست ۳۴۶٫۰ ریال و در دومی ۱۴۲٫۱۰ ریال قیمت دارد کرایه بردن هر خروار زغال در کیلومتر ۰٫۷۵ ریال است میخواهیم بین این دو کان کارخانه ای بنا کنیم بچه فاصله از کان نخست باید کارخانه ساخته شود تا زغالی که از این دو کان بآنجا میرسد دارای یک قیمت باشد؟

۱۹- پیراهن دوزی برای دوختن چند دست پیراهن و زیرشلواری ۶۷٫۵ متر مربع از یک پارچه نخی لازم دارد و میخواهد پس از شستن بدوزد درصورتیکه بدانیم پهنای این پارچه نخی که در بازار بدست میآورد ۸۰ سانتیمتر است و پس از شسته شدن $\frac{1}{16}$ پهنا و $\frac{1}{10}$ درازای آن آب میرود معین کنید چند متر

باید بخرد تا رفع احتیاجش بشود؟

۲۰ـ دانش‌آموزی در درس جبر سه مرتبه امتحان میدهد در امتحانهای اول و دوم ۱۴ و ۱۵٫۵ گرفته است میخواهد معدل این سه امتحان ۱۶ شود چه نمره‌ای باید در امتحان سوم بگیرد؟

۲۱ـ معدل سه امتحان دانش‌آموزی ۱۵ است و باید یک امتحان دیگر بدهد میخواهد معدل چهار امتحان ۱۵٫۵ باشد چه نمره‌ای باید در امتحان چهارم بگیرد؟

۲۲ـ برای تبدیل F درجهٔ فاهرنهایت (گرماسنج معمول انگلیسها است) به C درجهٔ گرماسنج یکصد درجه دستور زیر را بکار میبرند $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

پزشکی انگلیسی ببالین بیماری آمد و درجهٔ او را با گرماسنج فاهرنهایت گرفت و ۱۰۲ درجه شد معین کنید چند درجه (از گرماسنج ۱۰۰ درجه) تب دارد؟

۲۳ـ پیغمبر اسلام در سال ۶۲۲ میلادی از مکه بمدینه هجرت کرد. سالهای میلادی خورشیدی است و تاریخی که در ایران پیش از عصر پهلوی بکار میرفت هجری قمری بود. درصورتیکه بطور تقریب ۱۰۰ سال قمری برابر با ۹۷ سال خورشیدی باشد دستور تبدیل M سال میلادی را به H سال هجری قمری (بطور تقریب) پیدا کنید.

۲۴ـ برحسب تصمیم باشگاه سوارکاران هرسال درآخرین روز اسب‌دوانی تهران سه جایزه به بهترین اسبهای برنده داده میشود. جایزهٔ اسب نخست باید چهار برابر و جایزهٔ دوم دو برابر جایزهٔ سوم باشد اگر ۱۷۵۰۰ ریال برای سه جایزه تخصیص داده باشند مبلغ هریک چقدر است؟

۲۵ـ A ریال را بنسبت ۷ و ۹ تقسیم کنید.

۲۶- دو نفر شریک میخواهند $K$ ریال سود را بین خود تقسیم کنند میدانیم سرمایه اولی $a$ ریال در مدت $t$ سال و سرمایه دومی $a'$ ریال در مدت $t'$ سال در شرکت بوده است سهم هر یک چه میشود؟

۲۷- تندی صوت در هوائیکه بگرمی $t$ باشد از روی دستور $v = 332\sqrt{1+0{,}00365t}$ بدست میآید معین کنید تندی صوت ($v$) را در هوای $35^\circ$

۲۸- از روی دستور بالا معین کنید گرمی هوا را بالفرض اینکه بدانیم تندی صوت ۳۳۸ متر باشد.

۲۹- میدانیم وزن یک جسم مساویست با حاصل ضرب حجم آن جسم در وزن مخصوصش اولاً این قضیه را بوسیله یک رابطه جبری بنویسید ثانیاً اگر وزن جسم را به $P$ و حجمش را به $V$ و وزن مخصوصش را به $D$ بنامیم در حالتی که $V = 12$ سانتیمتر مکعب و $D = 3{,}5$ باشد وزن آنجسم را حساب کنید و نیز در حالتیکه $P = 120$ کیلوگرم و $D = 1{,}8$ باشد حجم آنرا بدست آورید.

# فصل دوم

## الف - عدد جبری

**۱- چندیهائی (کمیتهائی) که دارای دو سو میباشند.** بیشتر در زندگانی بمحاسبه چندیهائی (کمیتهائی) برمیخوریم که دارای دو سو میباشند

مثال ۱- دفتر حساب روزانه هر تجارتخانه شامل پولهائیست که وارد صندوق تجارتخانه

شده و نیز شامل پولهائیست که از طرف تجارتخانه پرداخته شده است گرچه هرکدام مبلغی پولند ولی در معنی با یکدیگر اختلاف کلی دارند .

مثال ۲- از خانه بدبیرستان میروید و از دبیرستان همان راه را برمیگردید اینجا دو راه مساوی پیموده اید ولی یکی شما را بدبیرستان نزدیک میکند و دیگری شما را از آن دور مینماید . بنابرین این دو مسافت دارای دو سوی مخالفند .

مثال ۳- درس جبر شما دو ساعت بظهر مانده است و یا آنکه ورزش شما دو ساعت از ظهر گذشته است این دو مدت نیز دارای دو سوی مخالفند .

## ۱۱- عددهائیکه در حساب بکار میرود برای نمودن اینگونه چندیهاکافی نیستند

وقتی مجهول یک مسئله از چندیهائی است (کمیتهائیست) سودار باید علاوه بر محاسبهٔ مقدار عددی مجهول سوی آنرا نیز تعیین کرد .

عددهای حسابی تنها مقدار عددی مجهول را بدست میدهد بدون اینکه سوی آنرا معین کند و اگر بخواهیم بکمک عددهای حساب سوی چندیها نیز معلوم شود ناچاریم الفاظی بکار برده جمله بندی کنیم .

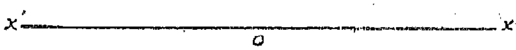
مثلاً بگوئیم ۵ ریال بستانکاریم یا ۵ ریال بدهکار که دو لفظ بستانکاریم و بدهکار سوی چندی را معلوم میکند . بنابرین عددهای حسابی بتنهائی برای نمایش چندیهائیکه دارای دو سوی مخالفند کافی نمیباشد

در جبر برای اندازه گرفتن اینگونه چیزها عددهائی درست کرده اند که هم مقدار عددی و هم سوی چیزی را بنماید این عددها همان عددهای حسابند که بر آنها یکی از دو نشانه + یا − مقدم شده باشد.

**مثال** ـ اگر بطور کلی مبلغ بستانی (طلب) را بعلامت + و بدهی را بعلامت − بنمائیم در مثال پیش بجای اینکه بنویسیم ۵ ریال بستانکاریم کافیست بنویسیم ۵+ ریال و بجای آنکه بنویسیم ۵ ریال بدهکاریم بنویسیم ۵− ریال

میتوان گفت که دارائی ما ۵+ ریال یا ۵− ریال میباشد

**مثال دیگر** ـ متحرکی از نقطه $o$ واقع بر خط مستقیم $x'x$ حرکت میکند فرض میکنیم ۹ متر حرکت کرده باشد میخواهیم معلوم کنیم کجا رسیده است ـ برای این مقصود باید بدانیم بطرف




راست $o$ حرکت کرده است یا بطرف چپ.

چنانکه می بینیم عدد ۹ به تنهائی برای تعیین جای متحرک کافی نیست بلکه باید بر این عدد یکی از دو لفظ بطرف راست یا بطرف چپ را اضافه کرد تا جای متحرک معلوم شود.

حال اگر راهی را که متحرک بسمت راست می پیماید با نشانه + و مخالف آنرا با نشانه − بنمائیم و نسبتی بگوئیم ۹+ متر پیموده معلوم میشود که این متحرک در فاصله ۹ متری نقطه $o$ و در سمت راست آن واقع است. همچنین اگر ۹− متر پیموده باشد معنای آن این است که متحرک به ۹ متری $o$ در سمت چپ آن رسیده است.

**مثال دیگر** - اگر سطح اقیانوس را مبداء ارتفاع فرض کنیم و ارتفاع نقاط بالای آنرا بانشانهٔ + و نقاط پائین تر را بانشانهٔ - بنمائیم وقتیکه بگویند بلندی یک نقطهٔ ۲۰۰+ متر است معلوم میشود که آن نقطه ۲۰۰ متر بالاتر از سطح دریا واقع است.

و وقتی گفتیم بلندی دریای خزر ۲۰- متر است معلوم میشود که سطح دریای خزر ۲۰ متر از سطح اقیانوس پائین تر است.

**مثال دیگر** - اگر درجهٔ حرارت مکانی °۱۵- باشد معلوم میشود که آن مکان ۱۵ درجه سردتر از یخی است که درحال آب شدن است.

**۱۲- عددهای جبری** - هر عدد حسابی را که نشانهٔ + جلوی آن باشد عدد مثبت و هر عدد حسابی را که نشانهٔ - جلوی آن باشد عدد منفی مینامند.

مانند $+\frac{۲}{۳}$ (خوانده میشود بعلاوهٔ دو سوم) و $-\sqrt{۲}$ (منهای ریشهٔ دوم هفت)

عددهای مثبت و عددهای منفی را **عددهای جبری** گویند.

**۱۳**- عددهای حسابی را قدر مطلق عددهای جبری گویند.

چنانکه $\sqrt{۳}$ قدر مطلق دو عدد جبری $+\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ است و قرار براین داده اند که قدر مطلق عدد جبری $a$ را چنین نویسند $|a|$

پس $|-۲| = ۲$

**۱۴- تساوی دو عدد جبری** - دو عدد جبری وقتی مساویند که دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند.

۱۵- **دو عدد قرینه** - دو عدد جبری که دارای یک قدر مطلقند ممکن است مساوی نباشند مانند ۲- و ۲+

هرگاه قدر مطلق دو عدد مساوی ولی نشانهٔ آنها مختلف باشد آن دو عدد را قرینهٔ یکدیگر گویند مانند ۲- و ۲+ ؛ $-x$ و $+x$ ؛ +ج و ج-

۱۶- غالباً در عمل نشانهٔ + را از جلوی عددهای جبری برداشته آنها را بدون نشانه نویسند مثلاً بجای ۵+ و $+\sqrt{۳}$ و $+\alpha$ فقط ۵ و $\sqrt{۳}$ و $\alpha$ نویسند.

ولی هیچوقت نباید عددهای منفی را بدون نشانهٔ - نوشت.

## پرسش‌های سادهٔ شفاهی

۱- شمارهٔ شاگردان کلاسی ۳۵ است ۷ نفر آنان غایبند حاضران و غایبان را با عدد جبری بنمائید.

۲- دو متحرک از نقطهٔ O بر خط راستی حرکت مینمایند موضع های این دو متحرک را بوسیلهٔ زینه بندی یا مدرج نمودن خط و همچنین فاصله‌های آن دو را از یکدیگر در هر یک از حالتهای زیر معین کنید:

اولی ۸+ متر و دومی ۲+ متر پیموده

« « ۹- « « « ۱۲- «

« ۵- « « « ۲+ «

« « ۲+ _ « « « ۶-

اولی ۴- متر و دومی ۴+ متر پیموده

. . . +۵ . . . +۵ .

۳- بلندترین نقطه های کره زمین قله کوه اورست است به بلندی ۸۸۲۰ متر و ژرفترین نقطه های زمین نقطه ای از ته اقیانوس ساکن است به ژرفای (عمق) ۹۵۰۰ متر این دو طول را بعدد جبری نمایشید

۴- گرماسنجی ۱۵ زینه (درجه) را نشان میدهد - اگر سطح الکول (مایع) درون آن ۱۰ زینه یا ۱۲ زینه یا ۱۵ زینه پائین بیاید چه زینه را نشان خواهد داد؟

۵- گرماسنجی در ساعت ۷ صبح ۱۰- زینه را نشان میدهد اگر هر ساعتی که میگذرد سطح الکول درون آن سه زینه بالا بیاید معین کنید در ساعتهای ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صبح چه زینه ای را نشان خواهد داد؟

۶- تجارتخانه ای در یک روز بشرح پائین داد و ستد نموده است.

نخستین بار - دو دریافتی بمبلغ ۴۵۰ ریال و ۳۰۰ ریال داشته است.

بار دوم - ۳۵۰ ریال و ۵۰۰ ریال پرداخته است.

بار سوم - ۶۵۰ ریال پرداخته و ۹۰۰ ریال دریافت داشته است.

بار چهارم - ۳۰۰ ریال دریافت داشته و ۷۵۰ ریال پرداخته است.

بار پنجم - ۲۰۰ ریال دریافت داشته و ۲۰۰ ریال پرداخته است.

اولاً مطلوبست نمایش پولهای دریافتی و پرداختی تجارتخانه بعددهای جبری

ثانیاً نتیجه هر بار داد و ستد را بعدد جبری بنمائید

## ب - جمع عددهای جبری

مثال ۱ - باربری در یک روز دو دفعه بار برده است یکدفعه ۵ ریال و یکدفعه ۷ ریال مزد گرفته ضمناً یکدفعه ۵ر۱ ریال و دفعه دیگر ۷ر۰ ریال خرج کرده است درآمد و هزینه اورا با عددهای جبری نمایشید.

اگر درآمد را بعدد مثبت و هزینه را بعدد منفی نمایشیم دو عدد ۵ + و ۷ + نمایش درآمدها و دو عدد ۵ر۱ - و ۷ر۰ - نمایش هزینه های او میباشند و روشن است که مجموع چند درآمد درآمدیست یعنی مجموع چند عدد مثبت عددیست مثبت پس مجموع درآمدهای او یعنی مجموع ۵ + و ۷ + عدد ۱۲ + خواهد بود یعنی

$$(+5)+(+7)=+12$$

و چون مجموع چند هزینه هزینه است بنابراین مجموع چند عدد منفی عددیست منفی پس مجموع هزینه های او یعنی مجموع دو عدد ۵ر۱ - و ۷ر۰ - عدد ۲ر۲ - میباشد یعنی

$$(-1{,}5)+(-0{,}7)=-2{,}2$$

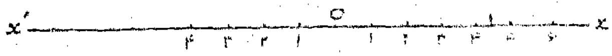
ازین مثال قاعده زیر نتیجه میشود:

۱۴ - قاعده - مجموع دو یا چند عدد جبری هم نشانه عددیست جبری که قدرمطلقش مساوی مجموع قدرمطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه اش با آنها یکی باشد:

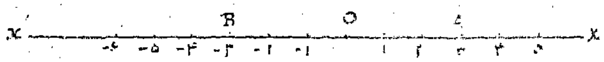
$$(+11)+(+7)=+18$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

۱۸- بر روی خط راست $x'x$ مثلاً نقطه‌ای مانند o برگزیده و از دو سمت آن قطعه‌های متساوی بر این خط جدا میکنیم حال اگر فاصله‌های نقطه o را از نقطه‌های واقع در سمت




راست آن بعدد مثبت نمایش فاصله‌های نقطه o از نقطه‌های واقع در سمت چپ بعدد منفی نمایش داده خواهد شد مثلاً نقطه‌ای که فاصله‌اش از o ۳+ است نقطه A است و نقطه‌ای که




فاصله‌اش ۳- است نقطه B میباشد.

میدانیم که مجموع دو عدد ۲+ و ۳+ عدد ۵+ است - از روی خط زمینه‌دار بالا هم میشود این مجموع را بدین قسم بدست آورد که از نقطه ۲ شروع کرده باندازه سه قطعه بسمت راست برویم تا به نقطه ۵ برسیم یعنی $+۲ + (+۳) = +۵$

همچنین اگر بخواهیم مجموع ۳- و ۴- را حساب کنیم کافیست که از نقطه ۳- شروع کرده ۴ قطعه بسمت چپ بشماریم تا به نقطه ۷- برسیم یعنی $-۳ + (-۴) = -۷$

میدانیم تفاضل ۳-۵ مساوی ۲ است از روی خط بالا هم میتوانیم این عمل تفریق را باین شکل انجام داد که از نقطه ۵ شروع کرده و باندازه ۳ قطعه بسمت چپ برویم در اینصورت بنقطه ۲ میرسیم همین ترتیب اگر از عدد ۵ پنج یکه کم کنیم بنقطه o میرسیم - بطور کلی برای تفریق این قاعده را داریم:

برای کم کردن عدد مثبت $a$ از عدد مثبت $b$ کافی است از نقطه $b$ شروع

گروه باندازهٔ a قطعه بسمت چپ برویم تا بنقطهٔ a-b برسیم.

اگر بخواهیم مطابق این قاعده عدد ۵ را از ۴ کم کنیم به نقطهٔ ۱- میرسیم یعنی

$$۴ - ۵ = ۱-$$

ولی چنانکه میدانیم این تفریق در حساب ممکن نیست زیرا ۵ بزرگتر از ۴ است و فقط میتوان چهار یکهٔ ۵ را از یکه های ۴ کم کرد و یک یکه زیاد است که نمیتوانیم کم کنیم و در حقیقت ۱- نمایش همین یک یکه کم نشده است و همچنین در تفریق ۲- = ۵ - ۳ عدد ۲- نمایش ۲ یکهٔ ۵ است که نتوانستیم از ۳ کم کنیم

**مثال** ـ اگر درآمد شخصی ۵ ریال و هزینه اش ۷ ریال باشد گوئیم دارائی او ۷ - ۵ یعنی ۲- ریال است ـ مطابق شرح بالا معنای آن این است که هزینهٔ او ۲ ریال بیش از درآمدش است

## پرسش های سادهٔ شفاهی

بوسیلهٔ خط زینه‌دار بالا عمل های زیر را انجام دهید

۷ - ۷      ۶ - ۴      ۴ + ۳

۵ - ۵      ۴ - ۹      ۳ - ۷

**تبصره** ـ روشن است که مثلاً برای کم کردن ۶ از ۱۵ میتوانیم یکه های ۶ را یکی یکی از ۱۵ کم کنیم تا به ماندهٔ ۹ برسیم میتوان نیز یک قسمت از یکه های ۶ مثلاً ۴ یکه آنرا اول تفریق کرد تا بشود ۱۱ و بعد ۲ یکهٔ دیگر را از ۱۱ کم کرد تا به ۹ برسیم و در هر تفریقی میتوان مانند این مثال عمل کرد

مثلاً برای کم کردن ۱۵ از ۶ اگر مستقیماً عمل کنیم به ماندهٔ ۹- میرسیم :

۶ - ۱۵ = -۹

و میتوان مثلاً اول ۶ یکه ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود صفر و بعد ۹ یکهٔ دیگر را از صفر کم میکنیم تا به ۹- برسیم یعنی

۰ - ۹ = - ۹

همچنین میتوان اول ۷ یکهٔ ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود ۱- و بعد ۸ یکهٔ دیگر را از ۱- تفریق کرد تا به ۹- برسیم یعنی

-۱ - ۸ = -۹

و نیز میتوانیم اول ۸ یکه کم کنیم تا بشود ۲- و بعد ۷ یکهٔ دیگر را

-۲ - ۷ = -۹ و مانند اینها

و این تفریق ها هم از روی خط زینه دار بالا بآسانی انجام میشود - مثلاً برای کم کردن ۷ از ۲- کافیست از نقطهٔ ۲- شروع کرده هفت قسمت بطرف چپ برویم تا به نقطهٔ ۹- برسیم .

## پرسش های ساده شفاهی

بوسیلهٔ خط زینه دار بالا عمل های زیر را انجام دهید :

۳ - ۷ ۰ - ۷ -۳ - ۴

۲ - ۵ -۳ - ۲ ۰ - ۵

۱۹- چون غرض از کم کردن عدد $b$ از عدد $a$ پیدا کردن عددیست مانند $c$ که چون با $b$ جمع شود عدد $a$ بدست آید بنابرین از تفریق

۲ - ۵ = -۳ نتیجه میشود که ۵ + (-۳) = ۲

-۳ - ۲ = -۵ « « ۲ + (-۵) = -۳

۰ - ۵ = -۵ « « ۵ + (-۵) = ۰

از تساویهای طرف چپ قاعدهٔ زیر بدست میآید:

۲۰- قاعده - مجموع دو عدد جبری که نشانهٔ آنها یکی نیست عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی تفاضل قدر مطلقهای آن دو عدد بوده نشانه‌اش نشانهٔ عددیست که قدر مطلقش بیشتر است

۲۱- نتیجهٔ اوّل - مجموع دو عدد قرینه صفر است

نتیجهٔ دوّم - چون مجموع دو عدد قرینه عددیست که قدر مطلقش صفر بوده و علامتش بدلخواه + یا - میباشد بنابرین

صفر هم عددیست جبری که میتوان بر آن + یا - مقدم داشت و یا آنرا بدون نشانه نوشت

نتیجهٔ سوّم - حاصل جمع هر عدد جبری با صفر خود آن عدد است.

مثال ۱- شخصی ۱۵۰ ریال بستانکار است و ۱۲۰ ریال بدهکار مبلغ دارائی او را بعدد جبری نمایش دهید.

معلوم است که این شخص ۱۲۰ - ۱۵۰ = ۳۰ ریال بستانکار است چون مبلغ بدهی او را بعدد جبری منفی و مبلغ بستانی او را بعدد جبری مثبت بنمائیم و چون مجموع دو عدد جبری ۱۵۰ + ۱۲۰ - موافق قاعده بالا ۳۰ + میشود بنابرین برای تعیین دارائی شخص باید مبلغهای بدهی بستانی را که بعدد جبری نموده شده اند با یکدیگر جمع نمود

مثال ۲ - شخصی بر خط راستی از مبداء ٥ ۲۷۰ متر بطرف راست (که مثبت گرفته میشود) راه پیموده و بعد ۳۰۰ متر در جهت مخالف رفته میخواهیم بدانیم بچه فاصله از نقطه ٥ رسیده و در کدام طرف آن واقع است ؟

بآسانی از روی یک شکل معلوم میشود که این شخص بفاصله ۲۷۰ - ۳۰۰ یعنی به ۳۰ متری سمت چپ ٥ رسیده است .

ولی چون دو عدد جبری ۲۷۰ + و ۳۰۰ - را باهم جمع کنیم از روی قاعده بالا (۲۱) نتیجه میشود

$$(-۳۰۰)+(+۲۷۰)=-۳۰$$

بنابرین برای تعیین موضع متحرک باید راههای پیموده شده در جهتهای مختلف را که باعدد های جبری نموده ایم باهم جمع کنیم

۲۲ - تبصره - در همین مثال بجای اینکه متحرک اول ۲۷۰ + متر راه رود و بعد ۳۰۰ - متر اگر اول ۳۰۰ - متر و بعد ۲۷۰ + متر میرفت بهمان نقطه میرسید یعنی نتیجه یکی میشد - پس

$$(+۲۷۰)+(-۳۰۰)=(-۳۰۰)+(+۲۷۰)$$

یعنی در جمع دو عدد جبری میتوانیم جای آن دو عدد را عوض کنیم بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۳- جمع چند عدد جبری - برای پیدا کردن حاصل جمع عددهای ۲+ و ۷- و ۸+ و ۶- که بصورت (۶-)+(۸+)+(۷-)+۲+ نوشته میشود قرار براینست که ابتدا مجموع دو عدد اولی را حساب کرده آنرا با سومی جمع کنیم و بعد حاصل را با چهارمی جمع نمائیم تا حاصل جمع کل بدست آید.

$$+2+(-7)+(+8)+(-6)=$$

$$-5+(+8)+(-6)=$$

$$+3+(-6)=-3$$

عدد ۳- را مجموع جبری عددهای بالا گویند

۲۴- خواص جمع - الف - چنانکه دیدیم میتوان در جمع دو عدد جبری جای آن دو عدد را تغییر داد در جمع چند عدد جبری هم میتوان جای آنها را بدلخواه تغییر داد

مثلاً این تساوی برقرار است

$$8\pm(-3)+(-4)=-4+(+8)+(-3)$$

زیرا از روی قرارداد بالا (۲۳) بترتیب خواهیم داشت

$$8+(-3)+(-4)=5+(-4)=+1$$

و

$$-4+(+8)+(-3)=+4+(-3)=+1$$

**ب - در جمع چند عدد جبری میتوان بجای دو یا چند عدد آنها مجموع جبریشان را قرار داد**

مثلا تساوی زیر برقرار است

$$(-7)+(+8)+(-3)=[(-7)+(-3)]+(+8)$$

مطابق قرارداد مجموع جبری طرف اول ۲- و طرف دوم مساوی حاصل جمع کرده است با ۸+

و یا $(+8)+(-10)$ یعنی ۲-

**۲۵- نتیجهٔ ۱ - از دو خاصیت بالا نتیجه میشود که در جمع جبری چند عدد میتوان دو عدد قرینه را حذف نمود** بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند.

۲۶- نتیجه ۲- میتوان برای محاسبهٔ مجموع جبری چند عدد عددهای مثبت و عددهای منفی را جداگانه جمع نمود تا این مجموع مبدل به مجموع دو عدد جبری شود یکی مثبت و یکی منفی مثلا

$$+4+(-7)+(+8)+(-3)+(-6)=$$

$$+4+(+8)+(-7)+(-3)+(-6)=+12+(-16)$$

$$=-4$$

بوسیلهٔ این قاعده میتوان عمل جمع عددهای جبری را تندتر انجام داد

## پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- حاصل جمعهای زیر را از روی قاعده های جمع بدست آورده بوسیلهٔ خط زینه دار بنده ۱۸

نیز درستی نتیجه را تحقیق کنید.

$۵ + (+۲)$ $\quad ۲ + (-۵)$ $\quad ۵ + (-۲)$

$-۳ + (-۲)$ $\quad -۴ + (-۱)$ $\quad -۷ + (+۱)$

$-۶ + (+۶)$ $\quad -۸ + (+۹)$ $\quad ۰ + (-۳)$

۲ـ حاصل جمعهای زیر را حساب کنید

$-۲,۵ + (-۳,۵)$ $\quad +\frac{۳}{۴} + (+\frac{۷}{۴})$

$۳,۵ + (-۵,۵)$ $\quad +۱\frac{۲}{۵} + (-۱\frac{۱}{۵})$

$(-۱۰) + (+۱۵) + (-۵)$ $\quad -۷ + (-۲) + (-$

۳ـ دانش‌آموزی در راه خانه به مدرسه ۱۵۰ متر از خانه دور میشود و در میان راه ۲۵ متر برگشته باز ۳۰۰ متر بطرف مدرسه میرود معلوم کنید بچه فاصله از خانه رسیده است.

۴ـ شخصی دو بدهی دارد یکی ۱۵ ریال و دیگری ۱۰ ریال و در عوض ۱۲ ریال بستانکار است مقدار دارائی او را تعیین کنید.

۵ـ سه ساعت به ظهر مانده است ۱۵ ساعت دیگر چه ساعتی است و یا آنکه چهار ساعت پیش چه ساعتی بوده؟

۶ـ در هر یک از تساویهای زیر بجای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید تا تساوی برقرار باشد

۵ + ؟ = ۱۰     -۹ + ؟ = -۷

-۹ + ؟ = -۵     ۱۵ + ؟ = ۳

۸ + ؟ =     ۱۲ + ؟ = ۶

−۸ + ? = ۰        ۲ + ? = −۱۱

# ج- تفریق عددهای جبری

۲۷- **تعریف** - چنانکه در حساب دیده ایم غرض از کم کردن عدد جبری $b$ (کاسته یا مفروق) از عدد جبری $a$ (کاهش یاب یا مفروق منه) پیدا کردن عدد دیست جبری مانند $d$ (مانده) که چون با $b$ جمع جبری شود مجموع مساوی $a$ شود.

و آنرا چنین نویسند        $a - b = d$

این تعریف همانست که در حساب دیده ایم

مثال -

+۷ − (+۳) = +۴    زیرا    +۳ + (+۴) = +۷

+۳ − (+۷) = −۴    «    +۷ + (−۴) = +۳

−۹ − (−۶) = −۳    «    −۶ + (−۳) = −۹

−۱۹ − (+۱۱) = −۳۰    «    +۱۱ + (−۳۰) = −۱۹

+۱۱ − (−۱۹) = +۳۰    «    −۱۹ + (+۳۰) = +۱۱

## پرسش های سیاه و شفاهی

۱- هریک از عددهای سمت راست را مطابق تعریف بالا از عدد سمت چپ کم کنید (یعنی در هریک از مثالهای پائین عددی تعیین کنید که چون با کاسته جمع شود کاهش یاب بدست آید)

۵ از ۱۱        −۵ از ۱۱        −۵ از ۱۱

۷ از ۹     ۵- از ۵     ۵ از ۵-

۳ از ۵     ۵- از ۵-     ۶ از ۵

۳+ از ۵     ۱۵- از ۱۱     ۳- از ۰

۰ از ۳-     ۰ از ۸     ۸ از ۰

۴- در مثالهای بالا نشانهٔ عدد کاسته را تغییر داده (یعنی اگر + است - و اگر - است + نموده) با کاهش یاب جمع کنید و در هر یک از مثالها تحقیق کنید که این جمع مساوی تفاضل دو عدد مفروض است.

۳۸- موافق تعریف تفریق عدد $d$ وقتی مساوی باندهٔ $a-b$ است که $b+d$ مساوی $a$ باشد:

$$b+d=a$$

اگر بر دو طرف این تساوی قرینهٔ $b$ (کاسته) را بیفزائیم نتیجه میشود

$$b+d+(-b)=a+(-b)$$

یا

$$d=a+(-b)$$

یعنی برای بدست آوردن $d$ باندهٔ $a-b$ کافیست با $a$ (کاهش یاب) قرینهٔ $b$ (کاسته) را جمع کنیم

از اینجا قاعدهٔ تفریق بدست آمد:

قاعده - برای تفریق دو عدد جبری کافیست قرینهٔ کاسته را با کاهش یاب جمع کنیم تا مانده بدست آید.

در قسمت ۲ پرسش های بالا مانده ها را از روی همین قاعده بدست آوردیم .

۲۹ - از اینجا معلوم میشود که در جبر عمل تفریق تبدیل به جمع میشود و بنا برین تفریق دو عدد جبری همواره ممکن بوده دارای هیچ شرطی نیست و در صورتیکه در حساب این عمل وقتی ممکن است که کاهش‌یاب بزرگتر از کاسته یا دست کم مساوی آن باشد .

مثال -

-۵ - (+۱۱) = -۵ + (-۱۱) = -۱۶

-۵ - (-۵) = -۵ + (+۵) = ۰

۰ - (+۳) = ۰ + (-۳) = -۳

۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳

## پرسش های سادهٔ شفاهی

هر یک از عددهای سمت راست را موافق قاعدهٔ تفریق از عدد سمت چپ کم کنید .

۵ از ۱۱     -۵ از ۱۴     ۹ از ۹

۳ از ۸     -۸ از ۳     ۲٫۵ از ۳٫۵

-۵/۴ از ۵/۳     -۹ از -۹     -۱۲ از -۱۴

۲٫۵ از ۰     -۳٫۷۵ از ۰     ۰ از -۱/۳

-۱/۲ از -۱/۴     -۱٫۲۵ از ۲٫۷۵     ۱۱/۵ از -۲/۵

۳۰ - چون مطابق قاعده های جمع و تفریق و از روی خط زینه دار ۱۸ عمل کنیم خواهیم داشت :

$$5+(+2)=+7=5+2$$

$$2+(-5)=-3=2-5$$

$$5-(+2)=5+(-2)=3=5-2$$

$$-7-(-1)=-7+(+1)=-6=-7+1$$

$$0+(+5)=+5$$

$$0+(-2)=-2$$

$$0-(-3)=0+(+3)=+3$$

ازین چند مثال قاعدهٔ زیر را نتیجه میگیریم :

۳۱- قاعده - دو نشانهٔ پی در پی را اگر یکی باشد میتوان حذف نموده بجای آنها یک نشانهٔ + گذاشت و اگر دو نشانهٔ پی در پی یکی نباشد میتوان بجای آنها یک نشانهٔ - قرار داد

یعنی بطور کلی

$$+(+a)=+a$$

$$+(-a)=-a$$

$$-(+a)=-a$$

$$-(-a)=+a$$

## پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- در هر یک از تساویهای پائین بجای ؟ عددی بگذارید تا تساوی برقرار باشد

-(+۲)-(-۴)=؟     -(+۲)-(+۵)=؟

-(-۲)+(-۴)=؟     -(-۲)-(-۴)=؟

-۵+؟=۰     -(-۴)+(-۶)=؟

-۲+؟=۰     ۹-؟=۴

-۶-؟=-۶     -۹+؟=-۹

-۴-؟=۰     ۱۳+؟=-۱۳

۳۲- هرگاه بخواهیم چند عدد جبری را با یکدیگر جمع کنیم موافق قاعدهٔ بالا (۳۱) [illegible] کافیست آن عددها را با علامتهای خود دنبال هم بنویسیم مثلاً این مجموع را

-۲+(+۵)+(+۱)+(-۳)

میتوان چنین نوشت

-۲+۵+۱-۳

یعنی نشانه‌های جمع را نمی‌نویسیم و فایدهٔ این کار اختصار در نوشتن است پس باید در نظر داشت هرگاه چند عدد جبری دنبال یکدیگر نوشته شده باشند مقصود اینست که باید آن عددها را با هم جمع نمود .

مثال ۱-   +۶+(-۱)+(-۴)=+۶-۱-۴=+۱

مثال ۲-   ۳-(-۴)+(-۸)=۳+(+۴)+(-۸)

=۳+۴-۸=-۱

در مثال دوم قبلاً عمل تفریق (۴-) - را به تبدیل جمع نمودیم و پس از آن موافق قاعده بالا عددها را دنبال هم نوشتیم

## پرسش های شفاهی

نشانه های جمع و تفریق میان عددهای جبری زیر را حذف نموده آنها را بصورت ساده بنویسید و حاصل هر یک را بدست آورید

$$+(-7)-(-3) \qquad +(-2)+(-5)$$

$$-(-5)-(-11) \qquad -(-4)+(-3)$$

$$+(-3)-(-3)+(-1) \qquad -2+(-3)-(-4)$$

$$-4+(-1)-(+2)-(-3)-(-4)$$

$$-(-2)+(-3)-(-5)-(+11)$$

$$2-(-1)+(-2)-(+1)-(+2)$$

۲۴- چند جمله عددی - چند جمله عددی عبارتست از چند عدد جبری که میان آنها فقط نشانه جمع (+) و تفریق (-) یا یکی از آنها باشد.

و چنانکه دیدیم هر چند جمله را میتوان بمجموع چند عدد جبری تبدیل نمود.

مثلاً $-2-(+5)+(+1)-(-3)$ چند جمله ایست عددی و میتوان آنرا چنین نوشت

$$-2-5+1+3$$

عددهای ۲- و ۵- و ۱+ و ۳+ را که باید با یکدیگر جمع نمود جمله های این

چند جمله‌ایم.

وهمچنین ب - ج + د - ه چند جمله ایست که جمله های آن ب و ج - و د و ه - میباشد

۳۴ - میخواهیم دو چند جمله ۱ + ۵ - ۲ - و ۶ - ۲ + ۳ را باهم جمع کنیم حاصل جمع را میتوان چنین نوشت

(-۲ - ۵ + ۱) + (۳ + ۴ - ۶)

چون چند جمله اول مساوی ۶ - و دومی مساوی ۴ + است پس مجموع آن دو مساوی

۴ + ۶ - یعنی ۲ - است.

حال اگر جمله های این دو چند جمله را باهم جمع کنیم یعنی دو چند جمله را دنبال هم بنویسیم این چند جمله

-۲ - ۵ + ۱ + ۳ + ۷ - ۶

بدست می آید که چون جمله های آنرا باهم جمع کنیم همان مجموع دو چند جمله بالا یعنی ۲ - حاصل میشود ازین مثال نتیجه میگیریم که:

برای جمع کردن چند جمله ها جمله های آنها را دنبال هم نوشته آنها را باهم جمع میکنیم (این قاعده عکس قسمت ب از بند ۲۴ است)

مثال -

(- ۵ + ۷ - ۹) + (- ۶ + ۳) = - ۵ + ۷ - ۹ - ۶ + ۳ = - ۱۰

د) $(a-b)+(b-y-a)=a-b+b-y-a=-y$

۳۵- **تعریف** - هرگاه دو چندجمله $S$ و $S'$ دارای یک عده جمله بوده که دو بدو قرینه هم باشند این دو چندجمله را قرینه یکدیگر گویند مانند

$S' = ۲ - ۳ + ۷$ و $S = -۲ + ۳ - ۷$

واضح است که مجموع دو چندجمله قرینه صفر است

۳۶- میخواهیم چندجمله ۴-۳+۲- را از چندجمله ۷+۵- تفریق کنیم تفاضل را میتوان چنین نوشت (-۵+۷)-(-۲+۳-۴)

چون حاصل کاهش یاب ۲+ و حاصل کاسته ۳- است پس تفاضل آنها مساوی (۳-)-۲ و یا ۳+۲ و یا ۵ میشود

حال اگر قرینه چندجمله کاسته را بر چندجمله کاهش یاب بیفزائیم همان تفاضل بالا بدست میآید

ازاینقرار:

(-۵+۷)+(+۲-۳+۴)=+۲+۳ = +۵

ازین مثال نتیجه میگیریم که:

برای تعیین تفاضل دو چندجمله میتوان چندجمله کاهش یاب را بر قرینه چندجمله کاسته افزود

مثال-

(-۳+۵-۷)-(-۲+۱۱-۱)=-۳+۵-۷+۲-۱۱+۱=-۱۳

$$(a-b)-(-b+y+a)=a-b+b-y-a=-y$$

۳۷- برداشتن و گذاشتن پرانتز ها - از مطلب های بالا معلوم میشود که:

اولاً میتوان پرانتزی را که در جلوی آن نشانهٔ + است حذف نمود

در این صورت نباید نشانه جمله های آن تغییر کند.

و اگر جلوی پرانتز نشانهٔ - باشد برای برداشتن پرانتز باید نشانه جمله های داخل را تغییر داد

$$(a+2-b-7)=a+2-b-7$$

$$-(a+2-b-7)=-a-2+b+7$$

ثانیاً بالعکس - همواره میتوان یکچند جمله را درون پرانتزی که دارای نشانهٔ + است نوشت

و نیز میتوان نشانه جمله های یکچند جمله را تغییر داده آنرا درون پرانتزی که دارای نشانهٔ - است بنویسیم مثلاً $3-2+5-11+7=$

$$=(3-2+5)+(-11+7)=-(-3+2-5)-(11-7)$$

$$a-b+x-y=$$

$$=(a+x)-(b+y)=-(b-x)-(y-a)$$

## پرسش های ساده.

۱- مجموع و تفاضل چند جمله های $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

فتیکه:

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +7 \\ b = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -10 \\ b = -1 \end{cases}$$

۲- چند جمله‌ای زیر را بمجموع و بصورت تفاضل دو پرانتز تبدیل کنید

$-a + b - c + d \qquad -15 + 3 - 5 + 11$

$+4 + a - 4x - b \qquad x - y - 4 + a + 12$

$-20 - a + y - m \qquad -15 + z - x + 2$

## تمرین

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید

$(+18) + (-9) + (-11) - (-15) - (+3)$.

$-(-40) - (+5) + (-7) - (-12) + (-15)$

$(-4) - [(+4) - (-2) + (-11) - (+7)]$

۲- بفرض $A = -3 + 2 - 2 + 1$ و $A' = -15 + 30 + 12 - 41$

و $A'' = -3 + 12 - 27 + 11$ حساب کنید چند جمله‌ای $A + A' + A''$

و $A - A' + A''$ و $A - (A' + A'')$ و $-A + A' - A''$ را

۳- چند جمله‌ای ج + ب - ه ، (ب + ج) - ه را در این حالات حساب کنید:

| ج | ب | ه |
|---|---|---|
| ج = +۱۲ | ب = +۷ | ه = +۴۵ |
| ج = -۱۴ | ب = -۷ | ه = -۴۵ |
| ج = -۱۴ | ب = +۷ | ه = +۴۵ |
| ج = +۱۴ | ب = -۷ | ه = +۴۵ |
| ج = +۱۲ | ب = -۷ | ه = -۴۵ |

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید:

(۴ - ۷ + ۴) + (۱۸ - ۵ - ۲۱)

(-۱۰ + ۱۵ - ۲۹) - (-۲۵ + ۱۱ - ۱۵)

(-۴ + ۷ - ۱۲) - (۳ + ۵ - ۶ - ۲) - (۱۲ - ۱۱ + ۵)

(۱۵ - ۲ + ۷) - (۴ - ۲ + ۷) - ۱۳

۵- ارشمیدس ۲۱۲ سال پیش از میلاد مرد و قیصر ۴۴ سال پیش از میلاد کشته شد و گالیله در ۱۶۴۲ پس از میلاد دلیلهای گردش زمین را انتشار داد و جلوس اعلیحضرت پهلوی در ۱۳۰۴ پس از هجرت است و اولین سنگ بنای دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳ پس از هجرت گذارده شد - اول هر کدام از این تاریخ ها را بعدد های جبری نمایید دوم تاریخ های میلادی را بهجری و یا بالعکس تبدیل کنید سوم فاصله زمان این تاریخها را دو بدو بدست آورید.

۶- وقتیکه تهران ظهر است در پاریس ۳ ساعت و ۱۷ دقیقه بظهر مانده است معلوم کنید ۲ ساعت بعد از ظهر

ظهر پاریس مطابق چه ساعتی از ظهر تهران است؟ و همچنین ساعت ۱۱ بعد از ظهر تهران مطابق چه ساعتی در پاریس است.

۷- شخصی در ماه اول ۵۰ ریال در صندوق پس انداز میگذارد و در ماه دوم ده ریال کمتر و در ماه سوم ده ریال از ماه پیش کمتر پس انداز میکند و این کار را مدت ۹ ماه میکند اول مبلغ پس انداز این شخص را در هر ماه معین کنید (پس انداز منفی را تعبیر کنید) دوم مبلغ کل پس انداز او را در مدت ۹ ماه بدست آورید.

۸- ارشمیدس حکیم ریاضی دان در سال ۲۸۷ پیش از میلاد متولد شده و در سال ۲۱۲ پیش از میلاد درگذشت حساب کنید چند سال زندگی کرده است

۹- خانه جمشید و خانه خسرو و مدرسه آنها در کوچه راستی واقع است فاصله خانه جمشید از مدرسه ۵۰۰ قدم و فاصله خانه خسرو از خانه جمشید ۲۴۰ قدم است تعیین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۰- در مسئله بالا بطور کلی اگر فاصله خانه جمشید از خانه خسرو $a$ قدم باشد و خانه جمشید $b$ قدم از مدرسه فاصله داشته باشد معین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه در حالتهای مختلف.

۱۱- دبیرستانی در کوچه راستی واقع است داریوش و ایرج از این مدرسه بکوچه می آیند اولی $a$ متر و دومی $b$ متر راه میرود بفرض اینکه $a$ و $b$ دو عدد جبری باشند اول فاصله این دو نفر را حساب کنید دوم مقدارهای جبری $a$ و $b$ تابع چه شرطی باشند تا این دو نفر در یک طرف مدرسه واقع شوند و یا آنکه مدرسه بین آنها باشد سوم اگر مجموع جبری راه هائیکه رفته باشند صفر باشد چه نتیجه میگیرید در این حال فاصله آنها چقدر خواهد بود؟

۱۲- گرماسنجی را در دو آبگون داخل کردیم در اولی ۱۵ درجه و در دومی ۲۷- درجه نشان داده است اختلاف حرارت این دو آبگون چقدر است؟

۱۳- درجهٔ صفر گرماسنجی بغلط معین شده است بقسمی که درجهٔ صفرش مطابق ۳ درجه بالای صفر است اگر این گرماسنج درجه‌ای ‎+۲۵‎ و ‎+۶۳‎ و ‎+۵‎ و ‎-۳‎ و ‎-۱۵‎ را نشان دهد مقدار حقیقی این درجه‌ها چند است؟

۱۴- اگر صفر گرماسنجی مطابق چهار درجه زیر صفر باشد درین گرماسنج مقدار حقیقی ۴° و ۷۵° و ۱۲۰° و ‎-۲°‎ و ‎-۲۰°‎ و ‎-۴۳°‎ را معلوم کنید

۱۵- در مدرسه که در بازی فوتبال مدرسه‌ها شرکت کرده بودند پس از تمام شدن مسابقه‌ها اولی ۶ دفعه برده بود و ۵ دفعه هیچ بر هیچ شده و ۳ دفعه باخته است دومی ۷ دفعه برده و ۳ دفعه هیچ بر هیچ شده و ۵ دفعه باخته است اگر به هر دفعه بردن یک نمره داده شود و برای هر دفعه باخت یک نمره کم شود نتیجه مسابقه‌های هر یک از دو مدرسه را معین کنید.

۱۶- پدری در موقع تولد پسر بزرگش ۲۱ سال دارد و در موقع تولد دخترش ۲۷ سال از سنش گذشته است معین کنید سن دختر را وقتیکه سن پسرش سی سال میشود.

۱۷- ساعت جمشید ۱۰ دقیقه جلوتر از ساعت دبیرستان است و ساعت دبیرستان ۵ دقیقه از ساعت شهرداری عقب است اگر ساعت شهرداری ظهر را نشان دهد ساعت جمشید و ساعت دبیرستان هر یک چه وقتی را معین میکنند؟

۱۸- در شهری سه ساعت است شخصی در ضمن گردشش می بیند که هر سه ساعت یکموقع را نشان میدهند و حال آنکه از ساعت اول تا ساعت دوم ۱۵ دقیقه در راه بوده و از ساعت دوم تا ساعت سوم ۱۱ دقیقه راه پیموده است و ساعت خود او ۱۸ دقیقه از ساعت سومی عقب است اگر ساعت دوم صحیح باشد هر یک از این ساعتها را

چه تغییری باید داد؟

۱۹- شخصی به پیشواز کسی از دهستان ۱۳ دقیقه پیش از رسیدن ترن وارد ایستگاه راه آهن شد؛ خبر دادند که ترن ۲۷ دقیقه دیرتر از موقع مقرر خواهد رسید اگر ترن میتوانست ۱۲ دقیقه زودتر برسد چند دقیقه باید منتظر شود؟

۲۰- ترنی از ایستگاه با ۲۰۰ نفر مسافر درجه اول و ۸۵ مسافر درجه دوم و ۱۱۵ مسافر درجه سوم حرکت میکند در اولین ایستگاه از درجه اول ۵ نفر و از درجه دوم ۲۷ نفر و از درجه سوم ۴۰ نفر خارج میشوند؛ در عوض ۸ مسافر درجه اول و ۱۵ مسافر درجه دوم و ۴۴ مسافر درجه سوم سوار میشوند در ایستگاه دوم از این سه درجه بترتیب ۱۹ و ۴۸ و ۵۹ نفر پائین میآیند و ۴ نفر درجه اول و ۱۵ نفر درجه دوم و ۲۹ نفر درجه سوم سوار میشوند و در ایستگاه سوم همه خارج میشوند معین کنید در ایستگاه سوم از هر درجه چند نفر خارج شده است؟

۲۱- نخستین دانشمندی که کتاب جبر و مقابله نوشته محمد پسر موسی خوارزمی است که ایرانی و بسال ۲۲۴ هجری قمری فوت کرده است و نخستین اروپائی که جبر را بصورت کنونی درآورده دکارت Descartes فرانسوی است که در ۱۵۹۶ بدنیا آمده معلوم کنید اولاً چند سال پیش از عالم اروپائی یکنفر ایرانی جبر و مقابله را نوشته ثانیاً چند سال پیش خوارزمی میزیسته؟

## د- ضرب عددهای جبری

۳۸- در حساب مقصود از ضرب عدد ح در ب جمع عددهائی است که هر یک مساوی ح بوده و شماره آن عددها باندازه شماره یکه های ب باشد.

مانند $۴ \times ۲$ یعنی $۴ + ۴$ یا $۸$

ما این تعریف را در ضرب عدد های جبری عمومیت میدهیم ازین قرار :

در جبر مقصود از ضرب عدد **مثبت** در عدد جبری $\alpha$ جمع عدد هائیست که هریک مساوی $\alpha$ بوده و شمارهٔ آنها باندازهٔ شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد مثبت باشد

و مقصود از ضرب عدد **منفی** در عدد جبری $\alpha$ تفریق کردن عدد هائیست که هریک مساوی $\alpha$ بوده و شمارهٔ آنها باندازهٔ شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد منفی باشد

**مثال ۱ـ** مقصود از $(+۴) \cdot (+۲)$ جمع عدد $+۴$ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(+۴) \cdot (+۲) = (+۴) + (+۴) = +۸ = +(۴ \times ۲)$$

**مثال ۲ـ** مقصود از $(-۴) \cdot (+۲)$ جمع عدد $-۴$ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۴) \cdot (+۲) = (-۴) + (-۴) = -۸ = -(۴ \times ۲)$$

**مثال ۳ـ** مقصود از $(+۴) \cdot (-۲)$ تفریق عدد $+۴$ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(+۴) \cdot (-۲) = -(+۴) - (+۴) = -۸ = -(۴ \times ۲)$$

**مثال ۴ـ** مقصود از $(-۴) \cdot (-۲)$ تفریق $-۴$ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۴) \cdot (-۲) = -(-۴) - (-۴) = +۸ = +(۴ \times ۲)$$

ازین چند مثال این قاعدهٔ کلی برای ضرب دو عدد جبری بدست میآید :

۳۹- قاعده - حاصل ضرب دو عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آند و عدد میباشد نشانه اش + است وقتی که آن دو عدد هم نشانه باشند و گرنه - است.

از روی قاعدهٔ بالا نشانهٔ حاصل ضرب بطور خلاصه چنین است :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | در | + | = | + |
| − | در | + | = | − |
| + | در | − | = | − |
| − | در | − | = | + |

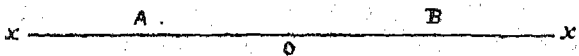
هریک از دو عددی راکه درهم ضرب میشوند سازه مینامند

۴۰- نتیجه - از فقرهٔ ۳۸ معلوم میشود که حاصل جمع $n$ سازهٔ مساوی برابر حاصل ضرب عدد $n$ است در آن سازه

$$(-x) + (-x) + (-x) = (-x) \cdot 3$$

مثال در تحقیق درستی قاعدهٔ بالا - اتومبیلی بر جادهٔ راست $x'x$ در هر ساعت ۳۰ کیلومتر راه می پیماید و ظهر بنقطهٔ $o$ میرسد میخواهیم موضع این اتومبیل را روی این جاده دو ساعت پیش از ظهر یا دو ساعت بعد از ظهر معین کنیم یعنی بوسیلهٔ عددی جبری

هم فاصلهٔ اتومبیل را از O بدست بیاوریم و هم معین کنیم در کدام طرف O واقع است.




معلوم است فاصلهٔ اتومبیل از O ۶۰ کیلومتر است باید معلوم کنیم در کدام سمت O واقع است

قبلاً قرارداد میکنیم که راههای پیموده شده بسوی راست مثبت و راههای پیموده شده بسوی چپ منفی باشد و همچنین زمانهای پیش از ظهر را منفی و زمان بعد از ظهر را مثبت اختیار میکنیم و هر ۳۰ کیلومتر را روی خط $x'x$ بیک ساعت نشان میدهیم دو حالت در نظر میگیریم:

**حالت اول اتومبیل بسوی راست میرود** - بنابرین راهیکه در یکساعت می پیماید عددیست مثبت مساوی ۳۰+ و چون ظهر به O میرسد پس دو ساعت پیش از ظهر بوضع A در طرف چپ O بفاصلهٔ ۲×۳۰ رسیده است حال اگر اندازهٔ جبری OA را به $\overline{OA}$ نمایش نتیجه میشود

$\overline{OA} = -60$ کیلومتر

و چون ظهر به O رسیده و پس در دو ساعت بعد از ظهر به نقطهٔ B که بفاصلهٔ ۶۰ کیلومتر از O و در طرف راست آنست میرسد یعنی $\overline{OB} = +60$ کیلومتر

اگر بطور کلی برای بدست آوردن راهیکه متحرک پیموده دستور $e = vt$ (نمرهٔ ۹ قسمت ب) را بکار بریم و در آن $v$ و $t$ و $e$ را عددهای جبری بگیریم نتیجهٔ بالا را بدست میآوریم از اینقرار:

در دو ساعت پیش از ظهر خواهیم داشت

$$e = \overline{OA} = (+30)\cdot(-2) = -60$$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OB} = (+30) \cdot (+2) = +60$ کیلومتر

حالت دوم اتومبیل بسوی چپ میرود - بنابرین راهیکه در یکساعت می پیماید عددیست منفی مساوی ۳۰ - پس در دو ساعت پیش از ظهر بوضع B در طرف راست O و بفاصله ۶۰ کیلومتر واقع است یعنی $\overline{OB} = +60$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر به A که در سمت چپ O و بفاصله ۶۰ کیلومتر است رسیده یعنی

$\overline{OA} = -60$ کیلومتر

از روی دستور هم همین نتیجه گرفته میشود:

در دو ساعت پیش از ظهر

$e = \overline{OB} = (-30) \cdot (-2) = +60$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OA} = (-30) \cdot (+2) = -60$ کیلومتر

## پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

+۵ در +۲ ; +۶ در -۴ ; +۹ در -۱۱

-۵ در -۲ ; -۵ در ۱,۶ ; -۹ در ۰

$-x$ در ۱۱ ; $-\alpha$ در -۵ ; ۰ در -۲

-۱ در ۸    -۱ در -۸    ۱ در ۱۲

۱ و -۱۱    -۱ و -۱٫۵    -۱ و +۱٫۵

۱۶۱- تحقیق کنید که این تساویها برقرار است .

$$(+۳)(+۵) = (+۵)(+۳)$$

$$(+۴)(-۷) = (-۷)(+۴)$$

$$(-۲)(+۶) = (+۶)(-۲)$$

$$(-۸)(-۴) = (-۴)(-۸)$$

از اینجا معلوم میشود :

**حاصل ضرب دو عدد جبری بستگی بجای آن دو عدد ندارد .**

یعنی بطور کلی $ab = ba$

۱۶۲- از اینکه قدر مطلق حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای سازه های ضرب است

نتیجه می شود که :

**حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر است**

یعنی $0 \times a = a \times 0 = 0$

و بعکس هرگاه حاصلضرب صفر باشد حتماً یکی از سازه های آن صفر است .

بنابرین : **شرط لازم و کافی برای اینکه حاصلضرب صفر باشد اینست که دست کم یکی از سازه های آن صفر باشد**

وهمچنین از ضرب هر عدد در ۱- قرینهٔ آن عدد بدست میآید وبعکس هر عدد مساوی حاصل ضرب ۱- در قرینهٔ آن عدد است .

یعنی $-1 \times x = x \times (-1) = -x$

۴۳- تحقیق کنید این تساویها برقرار است .

$$(+3)\cdot(+5) = -[(-3)(+5)] = -[(+3)(-5)]$$

$$(-4)(+7) = -[(+4)(+7)] = -[(-4)(-7)]$$

$$(-2)(-9) = -[(+2)(-9)] = -[(-2)(+9)]$$

$$(-6)(+11) = (+6)(-11)$$

$$(-5)(-3) = (+5)(+3)$$

از اینجا معلوم میشود که :

**اگر نشانهٔ یکی از دو سازه تغییر کند نشانهٔ حاصل ضرب تغییر میکند**

یعنی بطور کلی $xy = -[(-x)y] = -[x(-y)]$

**بنابراین اگر نشانه هر دو سازه تغییر کند نشانهٔ حاصل ضرب تغییر نمیکند**

یعنی $xy = (-x)(-y)$

۴۴- حاصل ضرب چند عدد جبری .- حاصل ضرب چند عدد جبری بدین شکل بدست میآید که دو سازهٔ اول و دوم را درهم ضرب نموده حاصل را در سازهٔ سوم ضرب میکنیم و این حاصل ضرب را در سازهٔ چهارم و بهمین ترتیب عمل می کنیم تا حاصل ضرب این چند عدد بدست آید

مثال -

( −۴ )( +۲ )( −۵ ) = ( −۸ )( −۵ ) = +۴۰

( +۳ )( −۲ )( +۷ )( +۵ ) = ( −۶ )( +۷ )( +۵ )

= ( −۴۲ )( +۵ ) = −۲۱۰

## پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید

( +۲ )( +۳ )( +۱ )　　　( −۲ )( −۳ )( −۱ )

( −۳ )( +۵ )( −۲ )　　　( −۱ )( −۷ )( −۳ )( −۱ )

( −۲ )( −۹ )( −۵ )( +۱ )　　　( +۲ )( −۱ )( −۵ )( +۱ )

( −۵ )( +۴ )( −۳ )( +۱ )( ۰ )　　　( −۱ )( +۷ )( −۱۱ )( ۰ )( −۸ )

۴۵ - در هر یک از مثالهای بالا تحقیق کنید که اگر جای سازه های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند

۴۶ - از مثالهای بالا معلوم میشود که اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت یا صفر باشد نشانهٔ حاصل ضرب + است وگرنه نشانه − است.

از دو خاصیت بالا قاعدهٔ زیر برای ضرب چند عدد جبری نتیجه میشود:

قاعده - حاصل ضرب چند عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه اش + است اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت و یا صفر باشد وگرنه

ـ خواهد بود

۴۷ ـ نتیجه ـ هرگاه یکی از سازه ها صفر باشد حاصل ضرب صفر میشود

۴۸ ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است .

$$[(-2)(+5)]\cdot(+3) = [(-2)(+3)]\cdot(+5)$$

$$= [(+5)(+3)]\cdot(-2)$$

$$[(-1)(-4)(+2)](-2) = [(-1)(-2)]\ (-4)(+2)$$

$$= [(-4)(-2)]\ (-1)(+2)$$

$$= [(+2)(-2)]\ (-4)(-1)$$

از اینجا نتیجه میگیریم که برای ضرب یکعدد در حاصل ضرب چند عدد کافی است آنعدد را در یکی از آن چند عدد ضرب کرده و از روی قاعدهٔ بالا حاصل ضرب را بدست آورد

یعنی $(abc)x = (ax)bc = (bx)ac = (cx)ab$

## پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

$ab$ وقتیکه $a=-2$ و $b=-5$ باشد

$abc$ ، $a=+2$ و $b=-3$ ، $c=0$

$5xy$ ، $x=-5$ و $y=-2$

−۳axy وقتی که a = ۱ ، x = −۲ ، y = −۴

» » a = −۱ ، x = +۲ ، y = +۳

» » a = +۱ ، x = +۲ ، y = +۳

» » a = −۲ ، x = ۰ ، y = ۰

۴۹ـ اول معنای این تساویها را بیان کنید

۵(−۲ +۴) = ۵(−۲) + ۵(+۴)

−۳(−۱+۲ −۴) = (−۳)(−۱) + (−۳)(+۲) + (−۳)(−۴)

(−۵ −۲ +۷)(−۹) = (−۵)(−۹) + (−۲)(−۹) + (+۷)(−۹)

دوم تحقیق کنید که تساویهای بالا درست است

از مثالهای بالا چنین برمیآید:

**برای تعیین حاصل ضرب یک عدد جبری در مجموع چند عدد میتوان آن عدد جبری را در هر یک از جمله های مجموع ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را باهم جمع جبری نمود.**

یعنی $(a-b+c)m = am - bm + cm$

۵۰ـ میخواهیم مجموع جبری (۳−۴) را در مجموع جبری (−۲ + ۵ −۱) ضرب کنیم

مستقیماً این حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ۱− در ۲+ است که مساوی ۲− میباشد

نیز میتوان یکی از این دو مجموع (مثلاً مجموع دوم) را یک عدد فرض نموده مطابق نمرهٔ ۴۹ ضرب

کرد ازینقرار :

(-۲ + ۵ - ۱)(۳ - ۴) = (-۲ + ۵ - ۱)(+۳) + (-۲ + ۵ - ۱)(-۴)

طرف دوم را نیز میتوان مطابق فرمول ۴۹ بسط داد و بنابرین حاصل ضرب چنین میشود

(-۲ + ۵ - ۱)(۳ - ۴) =

(-۲)(+۳) + (+۵)(+۳) + (-۱)(+۳) + (-۲)(-۴) + (+۵)(-۴) + (-۱)(-۴) =

-۶ + ۱۵ + -۳ + ۸ + -۲۰ + ۴ =

= -۲۹ + ۲۷ = -۲

وهمچنین :

$$(a+b-c)(x-y) = (a+b-c)x + (a+b-c)(-y)$$

$$= ax + bx - cx - ay - by + cy$$

## پرسش های ساده

۱- حاصل ضربهای زیر را از دو راه بدست آورید

$-5(a+b)$ وقتیکه $a=-2$ و $b=-1$ باشد

$x(a-b)$ « $x=-1$ و $a=2$ و $b=-4$

$x(a+b-4)$ « « « «

$-12(x-y)(-a)$ « $x=2$ و $y=-1$ و $a=-3$

$(a-b)(a+b)$ « $a=2$ و $b=-4$

$(a-b)(a+b)$ وقتیکه $a=2$ ، $b=-2$

، $a=-2$ ، $b=2$

$5(a+b-1)(x-y)$ ، $a=1$ ، $b=-1$ ، $x=2$ ، $y=-1$

، $a=0$ ، $b=0$ ، $x=0$ ، $y=1$

۲- دو مسافر از شهری با تندیهای ۸٫۵ کیلومتر در ساعت و ۱۰٫۲۵ کیلومتر در ساعت حرکت میکنند میخواهیم فاصلهٔ آنها را پس از مدت ۲ ساعت و ۲۵ دقیقه حساب کنیم درصورتیکه اولاً در یک جهت ثانیاً در دو جهت مختلف حرکت کنند

## ۵- تقسیم دو عدد جبری

۵۱- غرض از تقسیم عدد جبری $a$ (مقسوم) بر عدد جبری $b$ (مقسوم علیه) پیدا کردن عددیست جبری مانند $q$ (خارج قسمت) بطوریکه حاصل ضرب $b$ و $q$ مساوی $a$ شود و آنرا چنین نویسیم

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

بنا بتعریف بالا معلوم میشود که $a = bq$

مثال

$\frac{+8}{+4} = +2$ زیرا $+8 = (+2)(+4)$

$\frac{+10}{-2} = -5$ ، $+10 = (-2)(-5)$

$\frac{-12}{+4} = -3$ ، $-12 = (+4)(-3)$

$\frac{-۲۴}{-۶} = +۴$ زیرا $-۲۴ = (-۶)(+۴)$

## پرسش های ساده

خارج قسمت های زیر را حساب کنید

۹ بر ۳ ; ۹ بر -۳ ; -۹ بر ۳

-۱۵ و -۵ ; +۱۵ و -۵ ; -۱۵ و +۵

+۳۶ و -۹ ; -۳۶ و -۹ ; -۳۶ و +۹

$-a$ و $b$ ; $-a$ و $-b$ ; $a$ و $-b$

$x$ و -۱ ; ۱ و $-x$ ; -۱ و -۱,۵

۵۲- از مثالهای بالا معلوم میشود:

اولاً قدر مطلق خارج قسمت مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه است

ثانیاً نشانه خارج قسمت + است وقتی که مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه (هر دو مثبت یا هر دو منفی) باشند و - است وقتی که دارای دو نشانه مختلف (یکی مثبت و دیگری منفی) باشند

و نیز میتوان از روی تساوی $a = bq$ همین نتیجه را گرفت:

اگر $a$ و $b$ دارای یک نشانه باشند نشانه $q$ باید + باشد تا نشانه حاصل ضرب یعنی $bq$ همان نشانه $a$ شود و اگر نشانه $a$ و $b$ یکی نباشد به همین دلیل باید $q$ منفی باشد

بنابراین برای تقسیم دو عدد جبری این قاعده را خواهیم داشت:

قاعده - خارج قسمت عدد جبری $a$ بر عدد جبری $b$ عددیست

جبری مانند $q$ بقسمی که قدر مطلقش مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم $a$ بر قدر مطلق مقسوم علیه $b$ باشد و نشانه اش + است اگر مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه باشند و گرنه - است.

برای یافتن نشانهٔ خارج قسمت از روی قاعدهٔ بالا بطور خلاصه میتوان نوشت :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | تقسیم | بر | + | = | + |
| + | » | بر | - | = | - |
| - | » | بر | + | = | - |
| - | » | بر | - | = | + |

۵۳ - حالتهای مخصوص - نخست - اگر مقسوم علیه مساوی ۱+ باشد خارج قسمت مساوی مقسوم میشود بعبارت دیگر خارج قسمت هر عدد بر یک مساوی خود آنعدد است

یعنی $a : +1 = \frac{a}{+1} = a$ .

دوم - اگر مقسوم مساوی صفر و مقسوم علیه مخالف صفر باشد خارج قسمت صفر میشود

زیرا از تساوی $a = bq$ معلوم میشود که هرگاه $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد

چون طرف اول صفر است ناچار طرف دوم نیز مساوی صفر بوده و از آنجا $q$ باید صفر باشد

سوم - اگر مقسوم علیه صفر و مقسوم مخالف صفر باشد تقسیم محال است

زیرا خارج قسمت را هر عددی فرض کنیم چون حاصل ضربش در صفر مساوی صفر میشود بنابراین نمیتوانیم مساوی مقسوم که صفر نیست باشد.

تبصره - از تساویهای $۲ = \frac{۲}{۱}$ و $۲۰ = \frac{۲}{۰٫۱}$ و $۲۰۰ = \frac{۲}{۰٫۰۱}$ و ... معلوم میشود که هرچه قدر مطلق مقسوم علیه کوچک شود قدر مطلق خارج قسمت بزرگ میشود و چون قدر مطلق صفر از قدر مطلق تمام عددها کوچکتر است بنابراین قدر مطلق خارج قسمت هر عدد بر صفر از قدر مطلق تمام عددها بزرگتر میشود و چون چنین عددی را نمیتوان معین کرد آنرا بعلامت $\infty$ نمایش داده اند و آنرا بی نهایت گویند.

## ۵۴ - عکس یک عدد - عکس یک عدد مساوی خارج قسمت ۱+ است بر آن عدد

چنانکه عکس عدد ۴ - عدد $\frac{۱}{۴}$ - است و بطور کلی $\frac{۱}{a}$ عکس عدد $a$ میباشد

از روی این تعریف معلوم میشود که:

## حاصل ضرب هر عدد در عکس خود مساوی ۱+ است

۵۵ - درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید

$$\frac{-۲۰ \times ۴}{۵} = \frac{-۲۰}{۵} \times ۴ \quad \text{و} \quad \frac{-۲۴ \times ۳}{۸} = \frac{-۲۴}{۸} \times ۳$$

$$\frac{-۳۶ : (-۳)}{-۴} = \frac{-۳۶}{-۴} : (-۳) \quad \text{و} \quad \frac{+۱۸ : (-۲)}{-۳} = \frac{+۱۸}{-۳} : (-۲)$$

$$\frac{-۴۰}{۴ \times (-۵)} = \frac{-۴۰}{۴} : (-۵) \quad \text{و} \quad \frac{۴۸}{(-۶) \times ۲} = \frac{۴۸}{-۶} : ۲$$

$$\frac{-۳۶}{-۱۲ : ۳} = \frac{-۳۶}{-۱۲} \times ۳ \quad \text{و} \quad \frac{-۲۷}{(-۹) : (-۳)} = \frac{-۲۷}{-۹} \times (-۳)$$

$$\frac{-۱۲ \times (-۳)}{-۶ (-۳)} = \frac{-۱۲}{-۶} \quad \text{و} \quad \frac{+۳۰ : ۲}{-۵۴ : ۲} = \frac{+۳۰}{-۵۴}$$

از این تساویها میتوان خاصیتهای زیر را نوشت:

۵۶ - نخست - هرگاه مقسوم در عددی ضرب شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۵۷ - دوم - هرگاه مقسوم بر عددی تقسیم شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۸ - سوم - هرگاه مقسوم علیه در عددی ضرب شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۹ - چهارم - هرگاه مقسوم علیه بر عددی تقسیم شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۶۰ - پنجم - هرگاه مقسوم و مقسوم علیه در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند خارج قسمت تغییر نمیکند.

۶۱ - معنای این تساویها را بگوئید و تحقیق کنید که هریک درست است:

$$(۸ + ۱۲ - ۲۰) : (-۴) = \frac{-۸}{-۴} + \frac{+۱۲}{-۴} + \frac{-۲۰}{-۴}$$

$$(۹ - ۱۸ - ۱۲) : (+۳) = \frac{+۹}{+۳} + \frac{-۱۸}{+۳} + \frac{-۱۲}{+۳}$$

از این تساویها معلوم میشود که:

در تقسیم مجموع جبری چند عدد بر یک عدد میتوان هریک از جمله های آن مجموع را بر آن عدد تقسیم نمود و خارج قسمت های جزء را جمع کرد

بطور کلی میتوان نوشت:

$$(a+b+c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

زیرا از ضرب این خارج قسمت در $m$ مقسوم بدست میآید:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \times m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m + \frac{c}{m} \times m$$

$$= a + b + c$$

( $\frac{a}{m} \times m$ مساوی $a$ است زیرا $\frac{a}{m}$ خارج قسمت تقسیم $a$ بر $m$ است همینطور $\frac{b}{m} \times m = b$ و .... )

۶۴ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است:

$$(-3 \times 2 \times -12) : (-4) = (-3 \times 2) \times \frac{-12}{-4} = -3 \times 2 \times 3$$

$$(-4 \times -20 \times -7) : (+5) = (-4 \times -7) \times \frac{-20}{+5} = -4 \times -7 \times -4$$

یعنی: برای تعیین خارج قسمت حاصل ضرب چند عدد جبری بر یک عدد جبری $a$ میتوان یکی از آن عددها را بر $a$ تقسیم نموده خارج قسمت را در حاصل ضرب سایر عددها ضرب نمود

$$\frac{bcd}{a} = \frac{b}{a} \times cd = \frac{c}{a} \times bd = \frac{d}{a} \times bc$$

یادآوری ـ $\frac{-8 \times 12 \times 20}{-4}$ را نمیتوان چنین نوشت:

$$\frac{-8}{-4} \times \frac{12}{-4} \times \frac{20}{-4}$$

زیرا موافق قاعده بالا باید یکی از سازه‌ها بر ۴- تقسیم شود نه همه آنها

## و ـ نامساویهای عددی

۶۳ـ وقتی گویند عدد جبری $a$ بزرگتر از عدد جبری $b$ است ($a > b$) که $a - b$ مثبت باشد و درغیر اینحالت $a < b$ میباشد.

مثلاً چون تفاضل $(+5)-(-2) = +7$ مثبت است بنابرین $+5 > -2$

$(-7)-(-3) = -4$ منفی است بنابرین $-7 < -3$

از این تعریف نتیجه‌های زیر بدست میآید:

۶۴ـ نخست ـ هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است و هر عدد منفی از صفر کوچکتر است

دوّم ـ هر عدد مثبت بزرگتر از هر عدد منفی است

سوّم ـ از دو عدد منفی آنکه قدر مطلقش بزرگتر است کوچکتر میباشد

زیرا هرگاه دو عدد $a$ و $b$ منفی باشند و بفرض اینکه $|b| > |a|$ باشد لازم میآید که $b - a$ منفی باشد بنابرین $b < a$ خواهد بود

نتیجه ـ رشتهٔ اعداد صحیح جبری بترتیب کوچکی و بزرگی چنین است

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

چهارم ـ میتوان بر دو طرف یک نامساوی مقداری افزود یا از دو طرف مقداری کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی طرفی که بزرگتر بوده بزرگتر میماند

بفرض $a > b$ میتوان بدو طرف مقدار جبری $c$ را افزود در اینصورت خواهیم داشت

$a+c < b+c$ زیرا تفاضل $b-a$ ثابت میماند

پنجم ـ میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند

$5 < 7$ ـ از ضرب دو طرف در ۳ نتیجه میشود $15 < 21$ ـ زیرا تفاضل منفی است

ششم ـ چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود جهت نامساوی تغییر میکند (یعنی اگر طرف اول بزرگتر است کوچکتر از طرف دوم میشود و اگر کوچکتر است بزرگتر میگردد)

$2 < 7$ ـ از ضرب دو طرف در ۳- نتیجه میشود $-6 > -21$

## تمرین ها

۱ـ حاصل ضربهای $ab$ و $abc$ را در حالات زیر حساب کنید!

$a=+5$ ؛ $b=-9$ و $a=-5$ ؛ $b=10$ و $a=-8$ ؛ $b=4$

$a=-20$ ؛ $b=-12$ و $a=5$ و $b=-15$ ؛ $c=12$ و $a=b=-10$

$c=-8$ و $a=b=c=-7$

۲ـ $(x+y)(x-y)$ و $(2x-y)(3x+2y)(x-y-1)$ را در هر یک از حالات زیر حساب کنید

$x=3$ ؛ $y=-4$ و $x=2$ ؛ $y=7$ و $x=5$ ؛ $y=-2$

$x=-7$ ؛ $y=-8$ و $x=-5$ ؛ $y=-5$ و $x=-12$ ؛ $y=4$

۳ـ $(a+b)(c+d)$ و $(a-b)(c-d)$ را درحالتها حساب کنید

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 12$ | $b = 8$ | $c = -20$ | $d = 11$ |
| $a = -12$ | $b = -11$ | $c = -50$ | $d = 30$ و |
| $a = 11$ | $b = 11$ | $c = 11$ | $d = -11$ و |
| $a = 95$ | $b = -5$ | $c = -14$ | $d = -3$ و |
| $a = -40$ | $b = -8$ | $c = -15$ | $d = 0{,}25$ و |

۴ـ عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هریک را بدست آورید

$$(-21+10-15)(-5)-(7-12)(-3)$$

$$\left[(-5+11-7)-(-8+11-5)\right](-6+12)$$

$$\left[(-20+10-5)-(-10+4-9)\right]\left[(28-15)-(12+7-1)\right]$$

۵ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درین حالتهای مخصوص درست است

$4x-2=2x-12$ وقتیکه $x=-5$

$3x-5=2x+7$ « $x=12$

$2x+3y=17+10y$ « $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$(x-y)(y-2)=2x-$ « $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

۶- عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

(-۱۸ + ۳۵ - ۸) : (-۲ + ۷ - ۱۵)

-۱۱۷ : (۵ - ۳ + ۹ + ۲۰)

(-۲۱)(۴۹)(-۵۶) : (-۷)(-۳)

(۵ - ۲)(۷ - ۳) : (۴ - ۷)

[-۲۰ + (+۲)(-۵) + ۱۷ - ۱۲(-۲۵)] : (۱۰ - ۱۲)

۷- حاصل $\frac{ab}{c}$ و $\frac{a-b}{c}$ را در حالتهای زیر بدست آورید

$a = -۱۵$ $b = ۵$ $c = ۲$

و $a = ۲۴$ $b = -۸$ $c = -۶۰$

و $a = -۲$ $b = ۱۲$ $c = ۱۸$

و $a = -۴۸$ $b = -۱۵$ $c = -۳۰$

۸- تحقیق کنید که تساویهای زیر در این حالتها درست است

$x = -۹$ وقتیکه $\frac{x}{۳} + ۲x = ۶ + ۳x$

$\begin{cases} x = -۱۸ \\ y = -۲۸ \end{cases}$ ، $\frac{x}{۱۸} - \frac{y}{۷} = ۳$

۹- تحقیق کنید که آیا نامساویهای زیر در این حالتهای مخصوص درست است یا نه و نامساویهای نادرست را درست کنید

$2x-2 > (x-2)(x-7)$ وقتی که $x=2$

$2x-5 < \frac{x+3}{x-1}$ » $x=5$

$a-b > \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$ » $a=5$ , $b=-2$

$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$ » $a=3$ , $b=1$

$(a-b)(a+b) < 2ab$ » $a=2$ , $b=1$

۱۰- اگر $b > a$ باشد ثابت کنید که

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

۱۱- اگر $a$ , $b$ مثبت باشند ثابت کنید که

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

۱۲- ثابت کنید در چند نامساوی مجموع جبری طرفهای کوچکتر کوچکتر است از مجموع جبری طرفهای بزرگتر

(بوسیله یک مثال عددی درستی این قضیه را نشان دهید)

۱۳- در دو نامساوی چون طرف کوچکتر نامساوی دوم را از طرف بزرگتر نامساوی اول و طرف بزرگتر نامساوی دوم را از طرف کوچکتر نامساوی اول کم کنیم پس باقیمانده تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش موافق نامساوی اول خواهد بود - از روی چند مثال عددی امتحان کنید

۱۴- در چند نامساوی که دارای یک جهتند و دو طرف آنها مثبت است حاصل ضرب طرفهای بزرگتر بزرگتر است از حاصل ضرب طرفهای کوچکتر از روی یک مثال عددی درستی این نکته را تحقیق کنید.

۱۵- نخستین بازیهای قهرمانی المپیک درسال ۷۷۶ پیش از میلاد مسیح شروع شد و تا سال ۳۹۶ پس از میلاد دوام داشت میدانیم که این بازیها هر چهار سال یکبار تشکیل میشود در این مدت چند بار بازی شده است؟- دوباره درسال ۱۸۹۶ پس از میلاد بازیهای قهرمانی المپیک شروع شد بفرض اینکه انقطاعی حادث نشده باشد معلوم کنید المپیک آخری (۱۹۳۷) که در برلن بوده چندمین آنها است.

۱۶- $a$ کیلوگرم گوشت $b$ ریال ارزش دارد قیمت $d$ کیلوگرم آنرا حساب کنید (حالتهای مخصوص $a=۵$ ; $b=۱۶$ ; $d=۷$ همچنین $a=۱۲$ ; $b=۴۰$ ; $d=۳$)

۱۷- کارگری پس از $a$ روز کار $b$ ریال مزد گرفته است معلوم کنید پس از ۱۵ روز کار چند ریال مزد باید بگیرد؟ (حالتهای مخصوص $a=۱۲$ و $b=۱۲۰$ همچنین $a=۱۸$ ; $b=۱۳۵$)

۱۸- پس انداز فعلی پرویز $a$ ریال بیش از خسرو است اما پرویز هفته‌ای ۳ ریال و خسرو هفته‌ای ۵ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند هفتهٔ دیگر هر دو دارای یک مبلغ پس انداز میشوند (در حالتهای مخصوص $a=۱۲۰$ ; $a=۸۰$ ; $a=۵۴$)

۱۹- اگر نقطهٔ واقع در درون مثلث را به سه رأس وصل کنیم سه مثلث تشکیل میشود که چون مساحت آنها را $S_1$ و $S_2$ و $S_3$ فرض کنیم این دستور حاصل میشود $S = S_1 + S_2 + S_3$ ($S$ مساحت مثلث مفروض است) برای $S_1$ و $S_2$ و $S_3$ اندازه‌های جبری مثبت منفی در نظر بگیرید بطوریکه این دستور برای وقتی که نقطه بیرون مثلث باشد نیز صدق کند.

۲۰ـ همین مسئله را حل کنید وقتی که شکل چهار ضلعی باشد .

۲۱ـ فاصلهٔ ایرج و پرویز $d$ قدم است ایرج هر دقیقه $a$ قدم میدود و پرویز دقیقهٔ دو قدم بیشتر
اگر هر دو یکمرتبه بدوند بطوریکه پرویز برای گرفتن ایرج حرکت کند (یعنی هر دو بیک سو بدوند) معلوم کنید پس از
۳ دقیقه و پس از ۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود ـ (فرض میکنیم قدمهای ایرج و پرویز یک درازا باشد)

۲۲ـ در مسئلهٔ پیش اگر $d$ = ۲۴ قدم باشد پس از ۱۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود . جواب عددی است
منفی معنای آن چیست؟

۲۳ـ در مسئلهٔ پیش وقتیکه فاصله $d$ قدم است معین کنید پس از چند دقیقه پرویز ایرج را میگیرد؟

(حالتهای مخصوص : $d=۱۸$ ; $d=۴۸$ و $d=۶۰$ )

## ز ـ توان

۵۶ـ توان $m$ ام عدد جبری $a$ عبارتست از حاصل ضرب $m$ عدد مساوی $a$
و آنرا چنین نویسند $a^m$ (میخوانند $a$ بتوان $m$ )

$$a^m = \overbrace{a.a.a...a}^{m \text{ مرتبه}}$$

$a$ را پایه و $m$ را که عدد صحیح و مثبتی است نما خوانند چنانکه توان پنجم ۲- چنین است

$$(-۲)^۵ = -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ = -۳۲$$

و توان سوم ۵+ چنین میشود

$$(+۵)^۳ = +۵ \times +۵ \times +۵ = +۱۲۵$$

و توان چهارم ۳- چنین است

$(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = +81$

توان دوم و سوم یک عدد را بترتیب مربع و مکعب آن عدد نامند چنانکه مربع ۲ - عدد ۴+ است مکعب ۳- عدد ۲۷- است

## پرسش های ساده

توان های زیر را حساب کنید

$2^3$ $(-2)^3$ $(-2)^4$ $(+5)^2$

$(-5)^3$ $(-5)^4$ $(-1)^3$ $(-1)^5$

$(-1)^6$ $(-1)^m$ $(+1)^3$ $(+1)^m$

$(-8)^2$ $(-6)^2$ $\quad^2$ $\quad^m$

۶۶- چون توان حالت مخصوصی از ضرب است پس بنا بر قاعده نشانه ها (نمره ۶۴) چنین خواهیم داشت:

اگر عددی مثبت باشد توان m ام آن عدد نیز مثبت است و اگر پایه منفی باشد توان m ام آن مثبت است هرگاه m جفت باشد و منفی است اگر m تاق باشد

چنانکه

$(+3)^4 = (-3)^4 = +81$

و

$(-2)^3 = -8$

یادآوری - باید دانست که $ma$ و $a^m$ با یکدیگر تفاوت کلی دارند زیرا اولی عبارت

از حاصل جمع $m$ عدد مساوی با $a$ و دومی عبارت از حاصل ضرب $m$ سازه مساوی با $a$ میباشد.

چنانکه

$$(-4)\cdot 3=(-4)+(-4)+(-4)=-12$$

و

$$(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64$$

۶۷- برای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چند توان قاعدهٔ کلی اینست که هر یک از آنها را حساب کرده بعداً
قاعده های پیش عمل میکنیم

چنانکه

$$(-2)^3+(+3)^2=(-8)+(+9)=+1$$

و

$$(-2)^3-(+3)^2=(-8)-(+9)=-17$$

و

$$(-2)^3\times(+3)^2=(-8)\times(+9)=-72$$

$$(-2)^3:(+3)^2=(-8):(+9)=-\frac{8}{9}$$

## پرسش های ساده

حاصل عملهای زیر را بدست آورید

| | |
|---|---|
| $(-2)^2-(-4)$ | $(-5)^2+(-2)^3$ |
| $(-1)^3-(-1)^4$ | $-3^2-2^3$ |
| $(-4)^2\,(-2)^3$ | $(-4)^2\times(-3)^2$ |
| $(-5)(-1)^3(-3)$ | $(-1)^3\cdot(-2)^2\cdot(-3)$ |
| $(-5)^3:(-1)^2$ | $(-2)^4:(-3)^2$ |
| $(-5)^3:(-2)^3$ | $(-3)^3:(-2)^2$ |

$(-۵)^۲ \cdot (-۵)$ $\qquad$ $(-۳)^۳ \cdot (-۳)^۴$

$(-۸)^۲ : (-۸)$ $\qquad$ $(-۴)^۳ : (-۴)^۲$

$(-۳)^۲ \cdot (-۲)^۲$ $\qquad$ $۴^۳ \times (-۴)^۳$

۸۶- حالتهای مخصوص - نخست - حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه که نمای آن مجموع نماهای آنچند توان باشد

$$a^۲ \times a^۳ = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^{۲+۳} = a^۵$$

چنانکه $(-۲)^۳(-۲)^۲ = (-۲)^۵ = -۳۲$

$$(-۵)^۲(-۵)^۴ = (-۵)^۶ = ۱۵۶۲۵$$

دوم - حاصل ضرب چند توان که دارای یک نما باشند توانیست که پایهٔ آن حاصل ضرب پایه ها و نمای آن یکی از نماها باشد

چنانکه $(-۳)^۲(-۴)^۲ = (-۳)(-۳) \times (-۴)(-۴)$

$$= [(-۳)(-۴)]\,[(-۳)(-۴)]$$

$$= [(-۳)(-۴)]^۲ = ۱۲^۲ = ۱۴۴$$

و بطور کلی $x^a y^a z^a = (xyz)^a$

سوم - خارج قسمت دو توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه و نمائی مساوی تفاضل نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم

مثال ۱-

$$(-3)^4 : (-3)^2 = \frac{(-3)(-3)(-3)(-3)}{(-3)(-3)}$$

چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۳- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{(-3)(-3)}{1}$ و یا $(-3)^2$ که مساوی $(-3)^{4-2}$ است میشود

و بطور کلی در تقسیم $a^m$ بر $a^n$ اگر $m > n$ باشد خواهیم داشت

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (1)$$

مثال ۲-

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)^3}{(-4)^2} = -4$$

از روی دستور (۱) این خارج قسمت مساوی $(-4)^1$ میشود پس $(-4)^1 = -4$

یا بطور کلی $a^1 = a$

یعنی: توان نخست هر عدد خود آن عدد است

مثال ۳-

$$(-3)^2 : (-3)^2 = 1$$

اگر دستور (۱) را در این مثال که نماها مساوی هستند بکار بریم خارج قسمت مساوی $(-3)^0$ میشود از طرف دیگر اینجا خارج قسمت مساوی ۱+ است بنابراین برای اینکه دستور (۱) را در حالت $m = n$ نیز عمومیت داده هم قرار داد می کنیم که:

توان صفر هر عدد ۱+ است یعنی $a^0 = +1$

مثال ۴-

$$(-5)^2 : (-5)^4 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4}$$

گر چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۵- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{1}{(-5)^2}$ یا

$\frac{1}{(-5)^{4-2}}$ که عکس $(-5)^{4-2}$ است میشود

چون موافق دستور (۱) عمل کنیم خارج قسمت بالا مساوی $(-5)^{2-4}$ و یا $(-5)^{-2}$ میشود

درینجا بنمای منفی میرسیم - برای اینکه دستور (۱) کلی باشد میتوان چنین نوشت

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2}$$

پس قرار براین میگذاریم

**توانی که دارای نمای منفی است مساوی عکس توانیست که پایهٔ آن همان پایه و نمای آن قدر مطلق آن نما باشد**

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

نتیجه - با قرار دادهای بالا همیشه میتوان نوشت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

اگر در آن $m$ و $n$ دو عدد درست بوده و ممکن است $m > n$ و یا $m < n$ و یا $m = n$ باشد

## پرسش های ساده

۴ - عمل های زیر را انجام دهید .

$(-3)^{2}(-3)^{-1}$    $5^{2} \cdot 5^{2}$    $3^{2} \cdot 3$

$(-1)^{-1}(-2)^{-1}$    $3^{2} \cdot 2^{2}$    $(-2)^{0} \cdot (-2)^{1}$

$x^{n} \cdot x^{-n}$    $x^{0} y^{0}$    $5^{0} \cdot (-3)^{0}$

$3^{3} : 3^{2}$    $5^{a} \cdot 2^{a}$    $y^{-4} \cdot y^{4}$

$(-2)^{0} : (-5)^{0}$    $(-7)^{1} : (-7)^{2}$    $4^{-1} : 4^{-3}$

$x^{0} : x^{2}$    $x^{2} : x^{0}$    $a^{b} : a^{-b}$

$(-x)^{2} : x^{-2}$    $2^{a} : 2^{2a}$    $a^{1} : a^{0}$

۶۹- تبصره - میتوان $\frac{1}{b}$ را $b^{-1}$ نوشت و بنابراین

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

و بدین ترتیب تقسیم دو عدد را بصورت ضرب مینویسیم

۷۰- هرگاه بخواهیم توان $m$ ام $a$ را بتوان $p$ برسانیم کافیست $a$ را بتوان حاصل ضرب $mp$ برسانیم

یعنی

$$(a^{m})^{p} = a^{mp}$$

زیرا مثلاً

$$(x^{2})^{3} = xx \; xx \; xx = x^{6}$$

تبصره - بنابراین $(x^{3})^{2} = (x^{2})^{3}$ و $(x^{a})^{b} = (x^{b})^{a}$

$$\left(\frac{1}{a^{2}}\right)^{3} = (a^{-2})^{3} = a^{-6} = \frac{1}{a^{6}}$$

۷۱- توان $m$ ام خارج قسمت دو عدد جبری مساوی خارج قسمت

توان m ام آن دو عدد است

یعنی $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

زیرا $\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{-m}$

$$= a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

چنانکه $\left(\frac{-4}{2}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{2^3} = -8$

## پرسش های ساده

۱- تقسیمهای زیر را بصورت ضرب بنویسید

$\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{-7}{5}$ $\qquad \frac{2}{-4}$ $\qquad \frac{-a}{-x}$

$\frac{-b}{x}$ $\qquad \frac{-2}{-5}$ $\qquad \frac{-b^2}{-x}$ $\qquad \frac{b^2}{a^2}$

۲- عملهای زیر را انجام دهید

$(5^3)^2 \qquad (-2^2)^3 \qquad (-1^a)^5 \qquad (-1^a)^6$

$(x^0)^m \qquad \left[(-b)^5\right]^0 \qquad (3^{-2})^2$

$\left[(-2)(-3)\right]^2 \qquad \left[(-2)^2 \cdot (-3)\right]^{-1}$

$\left(\frac{-2}{-4}\right)^2 \qquad (ab^2)^3 \qquad \left(\frac{3}{-4}\right)^{-2}$

$\left(\frac{a}{-b}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{-5}{x}\right)^0 \qquad \left(\frac{-5^2}{-2^3}\right)^{-1}$

## ج- ریشه اعداد جبری

۷۲- ریشه n ام عدد جبری a ( n عددی است درست بزرگتر از صفر) عددی است

مانند $b$ بقسمی که چون آنرا بتوان $n$ رسانیم عدد $a$ بدست آید و آنرا بدین شکل نویسند $b = \sqrt[n]{a}$

بنابتعریف $b^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

نشانه $\sqrt{\quad}$ را ریشگی و عدد $n$ را شمارهٔ ریشه نامیم.

ریشهٔ دوم $a$ یعنی $\sqrt[2]{a}$ را اغلب چنین نویسند $\sqrt{a}$ (یعنی بدون شمارهٔ ریشه)

۷۳- چون توان جفت هر عدد جبری عددیست مثبت (مزهٔ ۶۶) بنابراین:

اولاً هیچ عددی نمیتوان یافت که بتواند ریشهٔ جفت عدد منفی باشد

چنانکه عبارتهای $\sqrt{-1}$ (ریشهٔ دوم ۱-) و $\sqrt[4]{-5}$ (ریشهٔ چهارم ۵-) بدون معنی میباشند

ثانیاً هر عدد مثبت دارای دو ریشه $n$ ام است وقتی که $n$ جفت باشد و این دو ریشه قرینهٔ یکدیگرند

چنانکه عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ دوم است ۹+ و ۹- : $81 = (\pm 9)^2$

گوئیم ریشهٔ دوم ۸۱ مساویست با بعلاوه یا منهای ۹

و همچنین عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم ۳+ و ۳- میباشد: $81 = (\pm 3)^4$

ثالثاً هر عدد جبری (خواه مثبت یا منفی) دارای یک ریشهٔ از شمارهٔ فرد است

چنانکه ۸- یک ریشهٔ سوم دارد مساوی ۲- : $\sqrt[3]{-8} = -2$

و همچنین ریشهٔ پنجم ۳۲ عدد ۲ است : $\sqrt[5]{32} = 2$

بکلیه حالتها $\sqrt[n]{0} = 0$ ($n$ جفت یا تاق)

۷۴ـ از اینجا و از آنچه در توان عددهای جبری گفتیم نتیجه میشود:

۱ـ شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری مساوی باشند اینستکه توان تاق یا ریشهٔ تاق آن دو عدد مساوی باشند

۲ـ شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری هم نشانه (هردو مثبت یا هردو منفی) مساوی باشند این است که توان جفت یا (اگر مثبت باشند) ریشه های جفت آن دو عدد مساوی باشند

این نتیجه ها را میتوان مثلا برای نشان دادن تساوی دو عدد که ظاهراً مختلف میباشند بکار برد

مثلا میخواهیم ثابت کنیم که دو عدد $\sqrt{48}$ و $4\sqrt{3}$ مساویند چون هردو مثبت میباشند کافی است ثابت کنیم توانهای دوم آنها یکی است توان دوم اولی ۴۸ و توان دوم دومی چنین است

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 \times (\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$$

**۷۵ـ ضرب ریشه ها ـ حاصل ضرب ریشه های چند عدد که دارای یک شماره باشند مساویست با ریشهٔ حاصل ضرب همان چند عدد با همان شماره**

یعنی مثلا

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$$

زیرا چون دو طرف را بتوان $m$ رسانیم میشود

$$a \cdot b \cdot c = abc$$

پس

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

۷۶- خارج قسمت دو ریشه - خارج قسمت ریشهٔ $m$ اُم دو عدد مُساویست با ریشهٔ $m$ اُم خارج قسمت آن دو عدد

یعنی مثلاً
$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

زیرا چون دو طرف را بتوان $m$ رسانیم درستی این تساوی معلوم میشود

پس
$$\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

و
$$\sqrt[5]{-9} : \sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{\frac{-9}{81}} = \sqrt[5]{\frac{-1}{9}}$$

## پرسش‌های ساده

حاصل ضرب و خارج قسمتهای زیر را بدست آورید :

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{\text{[illegible]}}$

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{-2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{-a^{5}} \cdot \sqrt[7]{-a^{2}}$

$\sqrt{20} : \sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{-81}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$

$\sqrt[3]{-2} : \sqrt[3]{-4}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{64} \cdot \sqrt[5]{-2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{16}} : \sqrt[7]{x^{2}}$

۷۷- عکس قاعده‌های بالا نیز درست است یعنی :

اولاً ریشه $m$ اُم حاصل ضرب چند عدد مُساوی حاصل ضرب ریشهٔ $m$ اُم هر یک از آنها است

یعنی
$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^2} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2} = |a|\sqrt[4]{a^2}$$

ثانیاً ریشهٔ $m$ ام خارج قسمت دو عدد مساوی خارج قسمت ریشهٔ $m$ ام آنهاست

یعنی

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

بنابراین

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

## پرسش های ساده

ریشه های زیر را ساده کنید:

$\sqrt{8}$ $\qquad \sqrt{27}$ $\qquad \sqrt{125}$ $\qquad \sqrt{45}$

$\sqrt[3]{81}$ $\qquad \sqrt[3]{-16}$ $\qquad \sqrt[3]{54}$ $\qquad \sqrt[5]{-64}$

$\sqrt{\frac{6}{8}}$ $\qquad \sqrt{\frac{12}{27}}$ $\qquad \sqrt{\frac{3}{27}}$ $\qquad \sqrt{\frac{9}{16}}$

$\sqrt[3]{-\frac{16}{96}}$ $\qquad \sqrt[3]{-\frac{54}{10}}$ $\qquad \sqrt[4]{\frac{64}{81}}$ $\qquad \sqrt[5]{\frac{-6}{64}}$

## تمرین

۱ - عبارتهای زیر را حساب کنید

$$\left(4 - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{4} - 2\right)$$

$$(-4)\left(+\frac{3}{5}\right) : (-2)\left(3 - \frac{5}{8}\right)$$

$$\left( ۲ + \frac{۳}{۵} + \frac{-۱}{۱۵} \right)(-۳) + \frac{-۴}{۱۱} + \left( ۹ - \frac{-۶}{۵} \right) : \frac{۱۵}{۱۲۰}$$

$$۴\left( ۳ - \frac{۵}{۷} + \frac{۱۱}{۲۸} \right)\left( \frac{-۴۹}{۷۴} \right) - \left( ۱۰ - ۴ - \frac{۶}{۵} + ۲ \right) : \frac{۴۵}{۸}$$

۲ـ مطلوبست محاسبهٔ عبارت

$$\left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left( ۱ + \frac{a+b}{a-b} \right)$$

در حالت های زیر

$a=۱ \;;\; b=۲$ و $a=۴ \;;\; b=۳$ و $a=-۶ \;;\; b=۵$ و $a=-۱۰ \;;\; b=-۱۵$

۳ـ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$$۳^۳ - (-۲)^۲ \;;\; ۲^۲ + (-۲)^۳ \;;\; (-۱)^۲ + (-۱)^۳ - (-۲)^۱$$

$$(-۳)^۲ + ۲ \cdot ۳ \cdot (-۴) : (-۴)^۲$$

$$\left[ (-۵)(+۲)(-۳) : (-۷) \right]^۲$$

$$(-۵)^۳ + ۳(-۵)^۲(+۴) + ۳(-۵)(-۴)^۲ - ۴^۳$$

۴ـ عبارتهای زیر را حساب کنید وقتیکه $x=-۳$ و $y=۲$ باشد

$$x^۲ \;;\; x^۳ \;;\; y^۲ \;;\; ۵x^۲y$$

$$x^۲ \pm y^۲ \;,\; x^۳ \pm y^۳ \;;\; x^۴ - y^۴ \;;\; x^۲ \pm ۲xy + y^۲$$

$$x^۳ - ۳x^۲y + ۳xy^۲ - y^۳ \;,\; (x+y)^۲(x-y)^۲ \;;\; (x^۲-y^۲)^۲$$

۵ـ عبارت $\frac{(۲a+b)(a-۲b)^۲}{۲a^۲b}$ را در حالت های زیر حساب کنید:

$a=۱ \;;\; b=-۱$ و $a=-۲ \;;\; b=۶$ و $a=-۴ \;;\; b=-۲$

۶- در تساویهای $2x^2 - 20x + 50 = 0$ و $x^2 + 12 = 7x$ و

$x^2 + x = 12$

بجای $x$ اعداد $\pm 5$ و $\pm 3$ و $\pm 4$ و $-8$ و $\frac{1}{3}$ و ۹ را

گذاشته نشان دهید در ازاء کدام اعداد تساوی برقرار خواهد بود

۷- مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} : (-3)$ $\qquad$ $\sqrt{(-4)\times 5\times(-3)+21}$

$\sqrt[3]{6(-4)+(-6)9-4}$

$(-3)\sqrt[3]{(-4)(-3)-2} \cdot \sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{-27}$

۸- عبارتهای زیر را بازاء $a=16$ ; $b=22$ ; $c=24$ حساب کنید

$\sqrt{\frac{3b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{b}{9c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{27a}}$

$\sqrt[3]{4a} - \sqrt{\frac{25}{12b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$

$\sqrt[3]{\frac{2a}{2c}} - \sqrt[4]{\frac{9b}{3c}} + \sqrt{\frac{a}{3c}}$

$\frac{3}{8}a - \sqrt{\frac{4a}{3b}} - \sqrt[3]{\frac{4ab}{b^2}}$

۹- عبارتهای زیر را حساب کنید وقتی که $a=-4$ ; $b=-3$

و $c=2$ ; $x=-1$ ; $y=-3$ ; $X=1$ باشد

$\sqrt[3]{b^3c^6} + \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt[3]{a^3+b^3+17cx}$

$$\sqrt{2x^3 - 2bc - b^2} \quad ; \quad \sqrt{a^4 + 4b}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^3 + z)(x - y - 3z)} \quad ; \quad \sqrt{-2x - 2y + z}$$

۱۰- میدانیم راهی که جسمی در موقع افتادن می‌پیماید از دستور $e = \frac{1}{2} g t^2$ بدست میآید که در آن e درازای راه و g تقریباً مساوی ۹٫۸۱ متر و t ثانیه هاییست که جسم در حرکت است. حال اگر بلندی برجی سی و پنج متر باشد معلوم کنید چند ثانیه طول میکشد تا سنگی که از بالای آن رها شده به پای برج برسد؟

۱۱- زمینی است بشکل مستطیل که درازای آن ۲۵٫۳۲ متر و پهنایش ۱۲٫۷۵ متر است میخواهیم آنرا با زمینی بشکل مربع که مساحتش مساوی مساحت آن مستطیل باشد عوض کنیم ضلع این مربع را حساب کنید.

۱۲- زمینی است بشکل مثلث متساوی الاضلاع که درازای هر ضلعش ۲۵٫۷۵ متر است ارتفاع این مثلث را تا $\frac{1}{100}$ متر تقریب حساب کنید.

۱۳- چون S و V بترتیب سطح و حجم یک کره این رابطه برقرار است $S^3 = 36\pi V^2$ اگر سطح این کره مساوی ۷۲ متر مربع باشد حجم آن چقدر است؟

۱۴- محیط مثلث متساوی الساقینی ۱۶ متر است و یکی از ساقهای آن ۱۰ متر میباشد ارتفاع و مساحت آنرا حساب کنید.

# فصل سوم - عبارتهای جبری و همچندیها

## الف - عبارتهای جبری

۷۷- عبارت جبری تشکیل شده است از یک رشته حروف و اعداد که بوسیلهٔ نشانه‌های جبری بهم پیوسته باشند

مانند $\frac{a+t}{100}$ و $2(a+b)-x$ و $\sqrt{5a-2b^2-\frac{3}{4}}$

۷۸- **یک جمله** - هر عبارتیکه بین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق نباشد یکجمله یا جمله نامند

مانند $-5$ و $\frac{1}{2}a$ و $x$ و $-n^2$ و $-2xy$ و $\frac{a^2\sqrt{3}}{x\sqrt{2}}$

۷۹- **ضریب** - چون عملهای بین اعداد یک جملهٔ مفروضی را اجرا نمائیم حاصل آنرا ضریب عددی یک جملهٔ مفروض گویند

مثلاً در یک جملهٔ $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot 5\cdot -\frac{3}{2}x^2$ حاصل $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 5\cdot -\frac{3}{2}$ یعنی $-\frac{15\sqrt{3}}{8}$ ضریب عددی یک جملهٔ مفروض است.

و همچنین در یک جمله‌های بالا ضریبهای عددی بترتیب عبارتند از $-5$ و $\frac{1}{2}$ و $1$ و $-1$ و $-2$ و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

و بطور کلی ضریب یکجمله بر حسب یکی از حرفهای آن عبارت از حاصل اعمالی است که بین سایر

حرفها و عددهای یک جمله انجام میشود

## پرسش های ساده

ضریب های عددی و همچنین ضریب های یک جمله های زیر را برحسب حرف x بیان کنید:

$-3x \qquad \frac{1}{2}a^2b \qquad \frac{\sqrt{3}}{5}xy^2 \qquad -x^2y$

$xy^2 \qquad \frac{-3}{\sqrt{2}}a \qquad \frac{-2abx}{3\sqrt{y}} \qquad -\frac{5\sqrt{2}\,yx}{2a}$

**۸۰ - جمله های متشابه** - جمله های متشابه جمله هائی را گویند که تنها در ضریب اختلاف داشته باشند.

مانند ۲ و ۳- و ۵ و همچنین $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{7}$ - و همچنین

$-5a^2x$ و $6a^2x$ و $-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2x$

**۸۱ - جمع جمله های متشابه** - روشن است که:

$$2a + 5a = 7a$$

$$xy + 3xy + 8xy = 12xy$$

$$3b^2 + (-4b^2) = -b^2$$

$$3abc + (-abc) + 4abc = 6abc$$

بعلاوه میتوانیم درستی این تساویها را اینطور تحقیق کنیم که بجای حرفها عددهای جبری بگذاریم به بینیم که اندازهٔ عددی دو طرف تساویها یکی است

بنابراین برای جمع جمله های متشابه این قاعده را داریم:

۸۴- قاعده- حاصل جمع چند جمله متشابه جمله ایست متشابه با آنها که ضریبش حاصل جمع جبری ضریبها باشد

مانند $6a^4+4a^4=(6+4)a^4=10a^4$

$$3ax+2ax+8ax=(3+2+8)ax$$

$$=13ax$$

$$x^2y+(-x^2y)=(1-1)x^2y=0$$

تبصره- در بعضی جاها که اشتباهی رخ ندهد میتوان عبارتهائی مانند $(x+y)$ و $\sqrt{7-3x}$ را یک جمله در نظر گرفت

بنابراین:

$$6(x+y)+[-5(x+y)]+(x+y)=2(x+y)$$

$$\sqrt{7-3x}+(-2\sqrt{7-3x})+3\sqrt{7-3x}=-3\sqrt{7-3x}$$

## پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$5a+3a$ $\quad\quad$ $-21a+7a$

$-9x^2-3x^2$ $\quad\quad$ $-xy+3xy-2xy$

$-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}$ $\quad\quad$ $2\sqrt{y}-3\sqrt{y}+\sqrt{y}$

$2(5-x)+3(5-x)$

$$۲(a+\sqrt{b}) - ۴(a+\sqrt{b}) + ۲(a+\sqrt{b})$$

۸۳ - **جمع جمله های غیر متشابه** - برای جمع جمله های غیر متشابه آنها را با نشانه های خود بدنبال هم مینویسند

مثلاً حاصل جمع دو جمله $-۲a$ و $۳b$ را چنین نویسند $-۲a+۳b$

۸۴ - **تفریق یک جمله ها** - چون یکجمله در حکم یک جمله عددیست (بازاء مقدارهای عددی حرفها) برای تفریق موافق (نمره ۲۸) باید نشانه یکجمله کاسته را تغییر داده با یک جمله کاهش یاب جمع جبری نمائیم

مثلاً برای تفریق $-۳xy$ از $۷xy$ راه عمل چنین است:

$$۷xy - (-۳xy) = ۷xy + (+۳xy) = ۱۰xy$$

همچنین

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} - (-۲\sqrt{x^۲+y^۲}) =$$

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} + (+۲\sqrt{x^۲+y^۲}) = -۳\sqrt{x^۲+y^۲}$$

## پرسش های ساده

تفریق های زیر را عمل کنید:

$۵x^۲$ از $x^۲$ ، $۴a^۲$ از $a^۲$

$-۵xy$ « $-۲xy$ ، $-\frac{۳}{۲}x^۲y$ « $\frac{۱}{۴}x^۲y$

$-۳\sqrt{۵x}$ « $۳\sqrt{۵x}$ ، $-\sqrt[۳]{xy^۲}$ « $-\sqrt[۳]{xy^۲}$

$\frac{۱}{۵}a\sqrt{x}$ « $-\frac{۱}{۴}a\sqrt{x}$ ، $\frac{-۳x^۲}{\sqrt{۵}}$ « $\frac{۲x^۲}{\sqrt{۵}}$

۸۵- چند جمله- از جمع جبری یک جمله یا چند جمله تشکیل میشود

مانند $ax + b$ و $ax^2 + bx + c$ ؛ $2xy - 2y + b\sqrt{2} - 1$

۸۶- ساده کردن چند جمله ها- چون چند جمله مجموع چند یک جمله ایست یعنی در حقیقت مجموع چند عدد جبری است پس میتوان جای آن یک جمله ها را بدلخواه تغییر داد و در نمره (۲۴) بخصوص میتوان یک جمله های متشابه را پهلوی هم نوشت و بجای جمله های متشابه مجموعشان را قرار داد این عمل را ساده کردن چند جمله نامیم

مثال- چند جمله

$$8a^2b - 4bc^2 + 1 + 3a^2b - 2c + bc^2 - 2$$

را میتوان (با قرار دادن جمله های متشابه در داخل پرانتز) چنین نوشت

$$(8a^2b + 3a^2b) + (-4bc^2 + bc^2) - 2c + (1 - 2)$$

پس از ساده کردن چنین میشود

$$11a^2b - 3bc^2 - 2c - 1$$

ساده کردن چند جمله ها برحسب یکی از حرفهای آنها:

مثال ۱- چند جمله $ax + bx + 1$ برحسب حرف $x$ دارای دو جمله متشابه $ax$ و $bx$ میباشد که مجموعشان $x(a+b)$ است

بنابراین چند جمله بالا پس از ساده کردن چنین میشود

$$(a + b)x + 1$$

مثال ۲- در چند جمله‌ای

$$2x^4 + 3x^2 - ax^4 - 2ax^2 + x^3 - 3bx + x$$

جمله‌های متشابه برحسب حرف $x$ عبارتند از ($2x^4$ و $-ax^4$) و ($3x^2$ و $-2ax^2$) و ($-3bx$ و $x$) بنابراین عبارت جبری بالا پس از ساده شدن بدینصورت درمی‌آید

$$(2-a)x^4 + (3-2a)x^2 + x^3 + (-3b+1)x$$

## پرسش‌های ساده

چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب حرف $x$ ساده کنید:

$$x^3 - 2x^2 + ax^3 - x^2 \qquad 3x - x^2 + 2x - 1$$

$$2 - ax + 3x - 4 \qquad x^2y - xy^2 + x^2 - x$$

$$x^2\sqrt{2} - x^2 + 10x \qquad x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + 1$$

$$2x^2 - \frac{1}{5}x^2 + 7x - a + bx$$

## ۸۷- مرتب کردن چند جمله‌ای بحسب توانهای صعودی یا نزولی یک حرف

هنگام نوشتن عبارت چند جمله‌ای اغلب یک حرف آنرا در نظر گرفته چند جمله‌ای را نسبت بتوانهای آن حرف مرتب می‌کنند یعنی طوری می‌نویسند که درجهٔ آن حرف در جمله‌های آن چند جمله‌ای یا مرتباً تنزل کند و یا مرتباً ترقی نماید در حالت اول گوئیم چند جمله‌ای بحسب توانهای نزولی آن حرف مرتب شده، و در حالت دوم گفته میشود که بحسب توانهای صعودی آن حرف مرتب شده است.

مثال ۱- چند جمله‌ای

$$2x^3y - 5y^2x^4 + ax - 2b + y^5x^1$$

واگر بحسب توانهای نزولی x مرتب کنیم چنین نوشته میشود

$$-5y^2x^4 + 2x^3y + y^5x^1 + ax - 2b$$

واگر بحسب توانهای صعودی x مرتب شود چنین نوشته میشود

$$-2b + ax + y^5x^1 + 2x^3y - 5y^2x^4$$

نمای x در جملهٔ $-2b$ صفر است زیرا میتوان نوشت

$$-2b = -2bx^0$$

**مثال ۲** - چند جمله بالا را اگر بترتیب توانهای نزولی و صعودی y مرتب کنیم بترتیب خواهیم داشت

$$x^2y^5 - 5x^4y^2 + 2x^3y + ax - 2b$$

$$ax - 2b + 2x^3y - 5x^4y^2 + x^2y^5$$

نمای y در $-2b$ و $ax$ صفر است یا بعبارت دیگر ضریب $y^0$ در چند جملهٔ مفروض $ax - 2b$ است

## ۸۸ - درجهٔ چند جمله نسبت بیک حرف آن و چند جملهٔ کامل و ناقص -

این درجه عبارتست از بزرگترین درجه ای که آن حرف در جمله های آن چند جمله دارد چنانکه چند جملهٔ بالا نسبت به x از درجهٔ چهارم است و نسبت به y از درجهٔ پنجم وچون این چند جمله نسبت به x شامل تمام درجه های کمتر از ۴ است گوئیم که چند جملهٔ چهارم کامل است نسبت به x

ولی چون تمام درجه های پائین تر از ۵ را از $y$ ندارد (مثلاً جمله ایکه در آن $y^4$ و $y^2$ باشد ندارد) گوئیم چند جمله بالا درجه پنجم ناقص است نسبت به $y$

۵ **مثال** - چند جمله کامل درجه اول نسبت به $x$ شامل دو جمله است یکجمله دارای $x$ از درجه اول و یک جمله بدون $x$ (یا دارای $x$ از درجه صفر) پس بصورت کلی $ax + b$ خواهد بود

همچنین چند جمله کامل درجه دوم نسبت به $x$ دارای سه جمله است و بصورت کلی

$Ax^2 + Bx + C$ است

و بطور کلی چند جمله کامل از درجه $n$ ام دارای $n + 1$ جمله است.

## پرسش های ساده

چند جمله های زیر را مرتب نموده و درجه آنها را بر حسب هر یک از حرفهای آنها معلوم نموده و معین کنید که کدام یک کامل و کدام یک ناقصند

$2x - y$      $2x - 3x^2 + y - 1$

$ax^2 - 1$      $ax^2 - 2bx$

$x^3 + 1 - xy + 2y^2$      $1 - 3x^3 - 2ax$

$x^3y - y + 1$      $xy^2 - y^2x + 1$

$\sqrt{3}x - x\sqrt{5} - y^2\sqrt{3}$      $2y^2 - y + 2xy^3 - 1$

۸۹ - **جمع چند جمله ها با یکدیگر** - برای جمع چند جمله ها با یکدیگر جمله های آنها را با نشانه های خودشان بدنبال هم مینویسیم و چند جمله حاصل را مطابق قاعده بالا ساده میکنیم

برای این کار بجای آنکه چند جمله‌ای‌ها را دنبال هم بنویسیم بهتر این است که :

**ابتدا هر یک را ساده کرده بعد بقسمی بنویسیم که جمله‌های متشابه آنها دسته بدسته در یک ستون قرار گیرند.**

**مثال** - برای جمع $2a-3b-ac^2$ و $2b+3ac^2$ و $-3a-7ac^2+11$ صورت عمل چنین است :

$$2a-3b-ac^2$$

$$2b+3ac^2$$

$$-3a \qquad -7ac^2+11$$

حاصل جمع ................ $-a-b-5ac^2+11$

چون هر یک از این چند جمله‌ها در حقیقت یک چند جمله عددیست پس باید مجموع جبری مقدار عددی آنها (بازاء تمام مقدارهای عددی $a$ و $b$ و $c$) مساوی مقدار عددی حاصل جمع باشد (بازاء همان مقدارهای $a$ و $b$ و $c$)

چنانکه برای تحقیق اگر $a=-2$ و $b=5$ و $c=-1$ باشد خواهیم داشت

$$2a-3b-ac^2 = -4-15+2=-17$$

$$2b+3ac^2 = 10-6=4$$

$$-3a \qquad -7ac^2+11 = +6+14+11=31$$

$$-a-b-5ac^2+11 = +2-5+10+11=18$$

مثال دیگر - حاصل جمع چند جمله ای های $ax+4x+3x^2$ و
$cx^2-2ax^2+bx-1$ و $4bx-x+a$ را بحسب حرف $x$
بدست آورید

میتوان آنها را با نشانه هایشان دنبال هم نوشته چند جمله حاصل را برحسب $x$ ساده نمود
و نیز ممکن است ابتدا هر یک از چند جمله ای های بالا را ساده کنیم ازینقرار :

$$(a+4)x+3x^2 \quad \text{و} \quad (c-2a)x^2+bx-1$$

$$\text{و} \quad (4b-1)x+a$$

و برای اینکه چیزی از قلم نیفتد بهتر آنستکه هر یک از چند جمله ها را مثلا بترتیب توانهای صعودی
$x$ مرتب کرد و بعد موافق قاعده بالا عمل نمائیم درین صورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{rrr} & (a+4)x+ & 3x^2 \\ -1+ & bx+ & (c-2a)x^2 \\ a+ & (4b-1)x & \\ \hline \end{array}$$

$$-1+a+(a+5b+3)x+(c-2a+3)x^2$$

۹۰- تفریق چند جمله - چون هر چند جمله در حقیقت چند جمله عددی است برای تفریق
موافق (نمره ۳۶) باید نشانه جمله های کاسته را تغییر داده با جمله های کاهش یا
جمع جبری نمود .

مثال ۱- میخواهیم $5ac^2$ را از $bx+3ac^2-1$ تفریق کنیم طرز عمل بدین قرار

خواهد بود.

$$bx + 3a^2c - 1 - (5a^2c) = bx + 3a^2c - 1 + (-5a^2c)$$

$$= bx - 2a^2c - 1$$

مثال ۲- میخواهیم $4x^2 - 2xy - 11$ را از $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7$ تفریق کنیم جمله های کاسته را تغییر نشانه داده با کاهش یاب جمع میکنیم از اینقرار:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7 \\ -4x^2 + 2xy \qquad + 11 \\ \hline -x^2 \qquad + 5y^2 + 4 \end{array}$$

همانطوریکه در جمع گفته شد میتوان بجای حرفها عدد قرار داده درستی عمل را تحقیق نمود چنانکه اگر $x = 2$ و $y = -5$ باشد کاهش یاب ۱۵۰ و کاسته ۲۵ و بنابراین تفاضل ۱۲۵ خواهد بود و اندازهٔ عددی $-x^2 + 5y^2 + 4$ نیز ۱۲۵ است

## تمرین ها

۱- عبارتهای زیر را بحسب حرف $x$ ساده نموده و مرتب کنید:

$ax + 4x - a$      $ax^2 - 2mx + x - 10$

$x^3 - 2ax^2 - bx + 2 - x^2 + x$

$x^2 - ax + bx^3 - bx + 2x^2 - 5$

$3ax^2 - 2bx + 5x^2y - 7ax$

$x^3 - mx^2 + 2mx - x + m - 1$

$K^2x^2 - (x - K)(K - x) + m(K^2 - K^2)$

۲- عبارتهای زیر را ساده نموده ضمناً بازاء $x = -1$ و $y = -2$ و $z = 1$ درستی عمل را تحقیق کنید

$(x^2 + xy - y^2) - (z^2 - yz - y^2) + (xy + z^2 - x^2)$

$(x^2 + y^2 - 2xy) + (2z^2 - 4y^2 - 3yz) - (2x^2 - 4z^2 + 3xy)$

$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2\right) - \left(x^2 - \frac{y^2}{3} - z^2\right) - \left(\frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{3}\right)$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$(7a - 2bc + c) - (5a - b + c)$

$(3x - 2y + 5) - (2x + 3y - 7)$

$(3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7) - (2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 10)$

(ب)

$-3x^3 - (5y - 7x^3 + 11) - (3x^3 - 4y + 2) + 5x^3$

$-(7a^3 + 4b^3) - (a^3 - 12b^3 + 16c^3) + 6a^3 - (6c^3 - 9b^3)$

$3ac - (ab + d) - [2ab - 3d - (-d - 4ac + 3ab)] - 2ac$

$m^2 - (x - y - m^2) - 3p - [4m^2 - (8p - x - y)]$

۴- بفرض $A = -5x + 3y + 2z$ ، $B = -5y + 3x + 2z$

و $C = -4z + 3x + 2z$

مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای $-A+B+C$ و $A-B+C$ و $-A+B-C$ و $A+B-C$

۵- بفرض

$$A = x^{5} + x^{3} - 8x^{2} - 8$$

$$B = x^{4} - 5x^{3} + 6x^{2} + 4x - 8$$

$$C = x^{5} - 2x^{4} + x - 2$$

$$D = x^{3} - 4x^{2} + 4x - 1$$

مطلوبست محاسبهٔ $\pm A \pm B \pm C \pm D$ با ترکیب نشانه‌های مختلف در هریک از این حالتها بازاء $x=-2$ درستی عمل را امتحان کنید

۶- معلوم کنید در $x$ سال قبل سن شخصی چقدر بوده است درصورتیکه بدانیم $a$ سال بعد سنش ۵۲ سال میشود

۷- ایرج $a$ ریال و کیومرث $b$ ریال و جمشید $c$ ریال پول داشتند قرار گذاشتند که اول ایرج از پول خود به نفع رفیق خود آنقدر بدهد تا پول آنها دو برابر شود و بعد کیومرث از آنچه که دارد پولهای رفیق خود را دو برابر کند و پس از او جمشید چنین کار را انجام دهد معلوم کنید پس از این کار مبلغ پول هریک چقدر میشود

۸- چهار نفر مبلغ $A$ ریال را بین خودشان تقسیم نمودند اولی $a$ ریال و نیمهٔ باقیمانده را برمیدارد دومی $b$ ریال و $\frac{1}{3}$ باقیمانده را و سومی $c$ ریال و $\frac{1}{4}$ باقیمانده را و آنچه که میماند از آن چهارمی خواهد بود سهم هرکدام چقدر است؟

## ب ـ همچندی

۹۱ ـ تعریف همچندی (معادله) عبارتست از تساوی چند عبارت جبری مانند:

$$۲ - ۳ = ۴ - ۵$$

$$x - ۲y = ۲x + y - x - ۳y$$

$$x - ۳ = ۲x$$

$$x^{۲} - x = ۲$$

$$۲x - y = ۰$$

عبارت طرف چپ نشانهٔ تساوی را طرف اوّل همچندی و عبارت طرف راست آنرا طرف دوّم همچندی نامیم.

مثلاً در همچندی دوّم طرف اوّل $x - ۲y$ است و در همچندی آخری طرف دوّم صفر است.

در همچندیهای بالا همچندی اوّل یک تساوی عددی است.

در همچندی دوّم اگر طرف دوّم را ساده کنیم حاصل $x - ۲y$ یعنی عین طرف اوّل میشود.

بنابراین هر مقدار بجای $x$ و $y$ قرار دهیم تساوی درست است.

هر همچندی (مانند همچندی دوّم) را که دو طرف آن پس از ساده کردن عین یکدیگر شوند اتّحاد گوئیم.

بنابراین در اتّحاد هر مقدار بجای حرفها در دو طرف قرار دهیم تساوی درست است.

معمولاً در اتّحادها بجای نشانهٔ = نشانهٔ ≡ را گذارند.

در همچندی سوم دو طرف دو عبارت مختلف میباشند و مساوی نیستند مگر آنکه بجای $x$ یک یا چند مقدار معینی (درین مثال عدد ۳-) گذاشته شود و همچنین است دو همچندی چهارم و پنجم - درین همچندیها دیده میشود که تساوی دو طرف همیشه برقرار نبوده و فقط وقتی برقرار است که بجای بعضی از حرفها مقدارهایی معینی گذارده شود

مثلاً در همچندی $x - ۳ = ۷$ دو طرف آن وقتی مساوی اند که بجای $x$ عدد ۱۰ را قرار دهیم

و همچنین در همچندی $x^۲ - x = ۲$ تساوی وقتی درست است که بجای $x$ یا ۲ و یا ۱- گذارده شود.

مقدار یا مقدارهائی را که بجای بعضی از حرفها باید گذارد تا دو طرف همچندی باهم مساوی شوند پاسخ (پاریشه) یا پاسخهای (پاریشه‌های) همچندی گویند

عدد ۱۰ در همچندی $x - ۳ = ۷$ و دو عدد ۲ و ۱- در همچندی $x^۲ - x = ۲$ پاسخ یا ریشه‌های این همچندی هستند

حرفی را که باید پاسخ همچندی را بجای آن گذارد تا دو طرف باهم مساوی شوند **مجهول** همچندی و سایر مقدارهای دو طرف را **معلوم**‌های همچندی نامیم

مثلاً در همچندی $x - ۳ = ۲$ حرف $x$ مجهول است

و همچنین در همچندی $x - ۲a = a$ اگر $a$ معلوم باشد $x$ مجهول همچندی است

و پاسخ یا ریشهٔ این همچندی $۳a$ میباشد

## پرسش های ساده

۱ـ ثابت کنید که همچندی های زیر اتحاد هستند

$x - a = -(a - x)$

$a + ۶ = ۷ + a - ۱$

$۳x - ۱ + x + ۱ - ۴x = ۰$

$a + b - x = ۲a - ۲x + ۳b - (a - x + ۲b)$

$a^۲ - (x + ۲y - ۱) = ۲a^۲ - ۲x - (a^۲ - x + ۲y) + ۱$

۲ـ ببینید آیا هرکدام از عددهای داخل پرانتز ریشهٔ همچندی ردیف خود هست یا نیست؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x - ۳ = ۲$ | $(۵)$ | $۲y + ۵ = ۱۱$ | $(۳)$ |
| $۴ - y = ۲$ | $(۳)$ | $۶y - ۱۰ = ۲$ | $(۱)$ |
| $۳ + t = ۶$ | $(۲)$ | $۴ - ۵a = -۱۰$ | $(-۶)$ |
| $۴ - x^۲ = ۷$ | $(-۱)$ | $۲m^۲ - ۲ = ۰$ | $(\pm ۱)$ |
| $۴ - a^۲ = ۵$ | $(۲)$ | $x^۲ - ۲x = ۸$ | $(-۲)$ |

۹۲ـ همچندیهای هم ارز ـ دو همچندی را هم ارز گویند هرگاه ریشه یا ریشه‌های آنها مساوی باشد

مانند $۲x + ۳ = ۱۵$ و $x - ۱ = ۵$ که ریشهٔ هردو ۶ است

و دو همچندی $x^۲ = ۳x - ۲$ و $۲x^۲ + ۴ = ۶x$ که ریشه های آنها ۲ و ۱ است

۹۳- حل همچندی - حل کردن همچندی یعنی یافتن ریشه یا ریشه های آن.

برای حل کردن همچندی باید آن را بیک عده همچندیهای هم ارز که بتدریج هریک از دیگری ساده تر باشند تبدیل نمود بطوریکه آخرین همچندی جواب را روشن سازد.

برای این مقصود اصل های زیر را که بمناسبت ساده بودن احتیاجی بدلیل ندارد باید درنظر داشت:

۹۴- اصل ۱- هرگاه با دو طرف همچندی یک مقدار جمع کنیم و یا از دو طرف آن یک مقدار کم کنیم ریشهٔ همچندی تغییر نمیکند یعنی همچندی حاصل هم ارز است با همچندی مفروض

مثال - ریشهٔ همچندی $x+2=5$ را پیدا کنید

بنا باصل بالا از دو طرف ۲ یکه کم میکنیم نتیجه میشود

$$x+2-2=5-2$$

و یا $x=5-2$ یعنی $x=3$

۹۵- نتیجه - اولاً دو عبارت مساوی و هم نشانه را میتوان از دو طرف همچندی حذف نمود.

زیرا بنا باصل ۱ میتوان این عبارت مساوی را از دو طرف کم کرد چنانکه دو طرف همچندی $x^2-3x-a=5x+x^2-1-a$ دارای دو جملهٔ $x^2$ و $-a$ است میتوان این دو جمله را حذف کرد همچندی بصورت سادهٔ $-3x=5x-1$ درمیآید

ان عبارتی را از یکطرف همچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانه آن را

یه اش این است که آن عبارت را از دو طرف کم کرده باشیم

ندی $x - a = ۲a$ چون $-a$ را بطرف دیگر ببریم این همچندی بدست

$x = ۲a + $ ویا $x = ۳a$

همچندی $۲x - ۱ + x^۲ = ۲x^۲ - ۴$ با همچندی

$- x^۲ - ۲x = ۲x^۲$ ویا $۲x = x^۲ - ۳$ هم ارز است زیرا

$x^۲ + ۱ -$ را بطرف دوم بردیم

## پرسش های ساده

ی زیر را حل کنید.

| | | |
|---|---|---|
| $y + ۲ =$ | $۳ + a = ۶$ | $x - ۱ = ۲۰$ |
| $z + ۱۱ =$ | $x - ۲ = -۲$ | $-۶ + t = ۷$ |
| $t - ۵ =$ | $۲ + k = ۰$ | $x + ۲ = ۲$ |
| $۰ = ۵ -$ | $۱۲ = d - ۸$ | $-۲ + y = -۳$ |

اصل ۲ - چون دو طرف همچندی را در عددی جبری ضرب

ه حاصل میشود با همچندی مفروض هم ارز است

ل ۱ — ریشهٔ همچندی $\frac{x}{۳} = ۲$ را تعیین کنید

ل ۲ دو طرف را در ۳ ضرب میکنیم نتیجه میشود

$$x = 6$$

## پرسش های شفاهی

ریشه هر همچندی را بدست آورید:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{x}{3} = 1$ | $\frac{a}{5} = 8$ | $\frac{b}{4} = 10$ |
| $\frac{k}{2} = -6$ | $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}$ |
| $-1 = \frac{z}{7}$ | $-\frac{1}{4} = \frac{y}{8}$ | $\frac{c}{4} = -3$ |
| $-\frac{1}{5} = \frac{n}{10}$ | $-\frac{y}{4} = -\frac{1}{8}$ | $-\frac{5}{3} = \frac{-z}{9}$ |

۹۷- اصل ۳- هرگاه دو طرف همچندی را در یک عدد جبری (بجز صفر) تقسیم کنیم ریشه همچندی تغییر نمی کند

مثال - همچندی $5x = 10$ را حل کنید

بنا با اصل ۳ میتوان دو طرف را بر ۵ تقسیم نمود نتیجه میشود

$$x = 2$$

## پرسش های شفاهی

همچندی های زیر را حل کنید

| | | |
|---|---|---|
| $6x = 12$ | $-3k = 15$ | $56 = -14t$ |
| $8a = 24$ | $-3 = 2m$ | $18 = 5y$ |
| $7b = -28$ | $12y = 11$ | $-125 = -25x$ |

$۵x = -۲$ $\quad -۲x = ۲۴ \quad -۱۳y = -۲۶$

مثال ۱ ـ هچندی زیر را حل کنید

$۵x - ۲ = ۲x + ۴$

بنا باصل ۱ از دو طرف ۲x تفریق می‌کنیم نتیجه میشود

$۳x - ۲ = ۴$

بعد ۲ یکه بر دو طرف می‌افزائیم (و یا آنکه ۲- را بطرف دوم میبریم موافق نتیجهٔ ۲ نمرهٔ ۹۵ حاصل میشود

$۳x = ۶$

حال دو طرف را بر ۳ تقسیم میکنیم (موافق اصل ۳) نتیجه میشود

$x = ۲$

مثال ۲ ـ این هچندی را حل کنید

$\frac{۳x}{۵} - ۲ = x + ۴$

اول دو جملهٔ متشابه ۲- و ۴+ دو طرف را ساده میکنیم یعنی بنا باصل اول ۲- را بطرف دوم میبریم حاصل میشود

$\frac{۳x}{۵} = x + ۶$

بنا باصل ۲ دو طرف را در ۵ ضرب می‌کنیم این هچندی بدست میآید

$۳x = ۵x + ۳۰$

بعد ۵x را بطرف اول میبریم (باید نشانهٔ آنرا تغییر داد) نتیجه میشود

$-۲x = ۳۰$

باین ترتیب یکطرف فقط دارای مجهول و طرف دیگر فقط دارای مقدار معلوم شده است حال اگر دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم مقدار مجهول بدست میآید :

$$x = -15$$

## پرسش های شفاهی

همچندیهای زیر را حل کنید :

$8h + 2 = 10$ $\qquad$ $3x - 7 = 2$ $\qquad$ $\frac{3c}{2} = 6$

$\frac{2c}{5} = 4$ $\qquad$ $8h = 16 + 2h$ $\qquad$ $2x + 2 = 0$

$-6l = -18$ $\qquad$ $7d + 7 = -14$ $\qquad$ $5m - 3 = 12$

$\frac{4x}{3} = -40$ $\qquad$ $3y - 4 = 5$ $\qquad$ $7s - 2 = 12$

**۹۸- همچندی یک مجهولی درجهٔ اول** - هرگاه یک همچندی پس از بکار بردن اصلهای بالا بصورت $ax = b$ درآید گویند آن همچندی یک مجهولی از درجهٔ اول است ( $x$ مجهول و $a$ و $b$ معلومهای همچندی اند)

**۹۹- قاعده برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول** - بنابر آنچه گفته شد برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول بهتر این است که عملهای زیر را منظماً باجرا نمائیم :

نخست - ساده کردن جمله های متشابه در دو طرف همچندی و از روی اصل (۱) یعنی که جمله های دو طرف پس از این عمل با هم متشابه نباشند

دوّم - از میان بردن مخرجها بوسیلهٔ ضرب دو طرف همچندی در کوچکترین مضرب آنها

(از روی اصل ۲) اگر معادله ای برخه باشد

سوم – بردن جمله های مجهول بیکطرف و معلوم ها بطرف دیگر (از روی اصل ۱)

چهارم – جمع جبری جمله های هر طرف

پنجم – تقسیم دو طرف بر ضریب مجهول (بنا باصل ۳)

عین این قاعده در مثال ۲ از شماره پیش بکار رفته است

مثال – مطلوبست حل $۶x - ۷ = ۳x + ۲$ جمله $۳x$ را بطرف اول

و ۷ – را بطرف دوم میبریم نتیجه میشود

$$۶x - ۳x = ۲ + ۷ \quad \text{یا} \quad ۳x = ۹$$

و پس از تقسیم دو طرف بر ۳ (ضریب مجهول) حاصل میشود $x = ۳$

## تمرین

معادله های زیر را حل کنید:

$$a + ۱۴ = ۲ - ۳a \qquad ۳x + ۲ = ۶ + x$$

$$۴z + ۳ - z + ۵ = z - ۱۰ \qquad ۴z + ۲ = ۲z$$

$$۴x - ۳ = ۵x - ۱۶ + ۴x - ۳ \qquad ۵y - ۱ = ۲y + ۵$$

$$۵x - (۳ + ۲x) = ۹ - ۴x \qquad x - (۸ - x) = ۱۰$$

$$۹x - ۲۲ - ۲x = ۱۰۰ - ۱۱x - ۴۲$$

$$z^۲ - z + ۱ = z^۲ + z - ۱ \qquad y^۲ - y = y^۲ - ۱$$

$$2z^2 - 3z + 2 = 2z^2 + 5z - 15$$

$$3x + 39 - 35x = 42 - 20x - 8$$

$$4y + 6 - 3y + 8 = 2y + 2 - 3y - 8 + 5y$$

$$2x - 9 = 8x + 10 = 15 + 5x - 2$$

$$5z + 10 + 8z - 2 + 3z = z - 2$$

$$13 + 12a + 11 - 10a = 10a - 11 - 12a - 13$$

$$3x + 6 - (4 - 2x) = 19x - (11x - 4)$$

$$a^2 - (2a - 3) = 6 - (2 - 3a) + a^2$$

مثال ـ مطلوبست حل همچندی

$$\frac{2x}{6} - 6 + \frac{3x}{8} + \frac{15}{4} = 14 + \frac{x}{6}$$

پس از ساده کردن جمله‌های متشابه دو طرف ($\frac{2x}{6}$ و $\frac{x}{6}$ همچنین ۶- و ۱۴) نتیجه میشود

$$\frac{x}{6} + \frac{3x}{8} + \frac{15}{4} = 20$$

دو طرف این همچندی را در عدد ۲۴ (کوچکترین مضرب برخه نامها) ضرب می‌کنیم این همچندی بدست میآید

$$4x + 9x + 90 = 480$$

یا $13x = 390$ و از آنجا $x = 30$

## تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید

$$\frac{9a}{5}+\frac{3a}{2}=19 \qquad \frac{5a}{3}+\frac{3a}{4}-36.25=0$$

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=\frac{x}{2} \qquad \frac{2y}{3}-\frac{y}{2}+\frac{4y}{5}=29$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{7}-\frac{x}{2}=15-x$$

$$\frac{2x}{7}-8=\frac{29x}{28}+\frac{4}{5}-\frac{3x}{4}-\frac{44}{5}$$

$$\frac{3z}{4}-\frac{5z}{12}=\frac{5z}{9}+6-\frac{2z}{9}$$

$$y-\frac{3y}{2}+9=\frac{2y}{3}+4+\frac{5y}{6}-\frac{6y}{5}+\frac{1}{5}$$

$$2x-3=2.25x-5-0.4x+2.6$$

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{3}+\frac{a}{4}-\frac{a}{6}+\frac{a}{8}+\frac{a}{12}=11$$

$$b=1+\frac{b}{2}+\frac{b}{4}+\frac{b}{8}+\frac{b}{16}+\frac{b}{32}$$

## ج ـ ضرب عبارتهای جبری

۱۰۰ـ فرض می‌کنیم مقصود بدست آوردن حاصل ضرب یکجمله $5a^3c$ در یک جمله $-3a^2b$ باشد. این حاصل ضرب را میتوان نوشت $-3a^2b\times 5a^3c$ و چون هر یک جمله تشکیل شده است از حاصل ضرب چند سازه بنابراین حاصل ضرب مساویست با حاصل ضرب سازه های آنها در یکدیگر یعنی:

$$-3a^2b\times 5a^3c=-3\times a^2\times b\times 5\times a^3\times c$$

و چون میتوان در حاصل ضرب چند سازه جای آنها را بخواه تغییر داد پس این حاصل ضرب را میتوان چنین نوشت :

$$-3a^2b \times 5a^3c = -3 \times 5 \times a^2 \times a^3 \times b \times c$$

و یا بنابر ضرب توانها $$-3a^2b \times 5a^3c = -15a^5bc$$

روشن است که این تساوی بازاء هر عددی که بجای حرف بگذارد درست است.

همینطور

$$2a^2b \times 3abx = 6a^3b^2x$$

$$2a^2b \times (-3abx) = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times 3abx = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times (-3abx) = 6a^3b^2x$$

یعنی در ضرب دو یا چند یک جمله قاعده نشانها بکار میرود

از بیان بالا قاعده زیر بدست میاید :

۱۰۱ـ قاعده ـ حاصل ضرب دو یا چند یکجمله خود یکجمله ایست که ضریبش حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یکجمله‌ها ( با قید نشانه ) بوده و تمام حرفهای آن یک جمله‌ها را داشته باشد نمای هر یک ازین حرفها مساوی مجموع نماهائیست که آن حرف در هر یک جمله دارد

مثلا $$(-2\sqrt{3}\,ax^2y)(-2\sqrt{5}\,bxy^3) = 6\sqrt{15}\,abx^3y^4$$

پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید:

$2a^2(-4a^3x)$ $\qquad 3a^3c \cdot 2c^2$ $\qquad (-2x)(2x^3)$

$(-2\sqrt{3})(-5\sqrt{6})$ $\qquad 5a^2y(-2ay^3)$ $\qquad (-4a^3x)(3ax^2)$

$(-3z)^2$ $\qquad (-2a^2)^3$ $\qquad 3k^2(-k)^3$

$(-2\sqrt{3}x)^2$ $\qquad (-\sqrt[3]{3}\,xy^2)^3$ $\qquad (2\sqrt{2})^2(-a^2)^3$

$(-3x)^2(a^2x)(-5abx^2)$

۱۰۲- **ضرب یکجمله در چند جمله** - چون بجای حرفها مقدار عددی گذاریم چند جمله حرفی تبدیل بمجموع جبری چند عدد میشود و یک جمله تبدیل بیک عدد پس برای ضرب یکجمله در چند جمله میتوانیم مانند ضرب یکعدد در مجموع جبری چند عدد (نمره ۴۹) عمل کنیم از اینقرار:

**یک جمله مفروض را در هر یک از جمله های چند جمله ضرب کرده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع می کنیم**

مانند

$$(2a^2 - 3ax + 4x - 6) \times 2ax =$$

$$2a^2 \times 2ax + (-3ax) \times 2ax + 4x \times 2ax + (-6) \times 2ax =$$

$$4a^3x - 6a^2x^2 + 8ax^2 - 12ax$$

## تمرین

عبارتهای زیر را ساده نموده بازاء $a=-2$ و $b=-1$ و $c=0$ و $x=1$ و $y=$ درستی عمل را تحقیق کنید

برای نمونه این مثال حل میشود

مثال - میخواهیم عبارت $2x^2(x-y)-y(-2x^2+y)$ را ساده نموده و بازاء مقدارهای عددی

$x$ و $y$ درستی عمل را تحقیق کنیم

ساده عمل چنین است :

$$2x^2(x-y)-y(-2x^2+y)=2x^3-2x^2y+2x^2y-y^2$$

$$=2x^3-y^2$$

بازاء $x=1$ و $y=2$ مقدار عددی حاصل $2(1)^3-(2)^2=2-4=-2$

است

و مقدار عددی عبارت مفروض نیز

$$2(1-2)-2(-2+2)=-2-2(0)=-2$$

میباشد

$$xy(a-b)-ab(x-y)+bc(a-x)$$

$$2a[x(ax-by)-y(bx-ay)]$$

$$2a\sqrt{x}(ab-b\sqrt{x}-\sqrt{x})-5c\sqrt{y}(cy-\sqrt{y})$$

$$2a\sqrt{x}(5a^2-3b\sqrt{x})-(4a^2-3b\sqrt{x})$$

$$b^2c[(a-c)-ab(a-b)]$$

$$x^2(a+b)-b(a-c)+a(b-x)-c(x-y)$$

مثال ۵ مطلوبست محاسبهٔ عبارت.

$$P = \sqrt{3}\ \left[4\sqrt{12} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{75} - \sqrt{48})\right]$$

ابتدا پرانتز درون کروشه را حذف میکنیم بعد $\sqrt{3}$ را در هریک از جمله های درون آن ضرب مینمائیم نتیجه میشود

$$P = 4\sqrt{36} - 2\sqrt{9} - \sqrt{225} + \sqrt{144}$$

و چون $\sqrt{36} = 6$ و $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{225} = 15$ و $\sqrt{144} = 12$

بنابراین

$$P = 24 - 6 - 15 + 12 = 15$$

و نیز در این مثال میتوان پیش از ضرب در $\sqrt{3}$ هرکدام از رادیکال های درون کروشه را ساده نموده بعداً حاصل کروشه را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم از قرار:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \quad و \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

و $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

بنابراین عبارت $P$ چنین میشود

$$P = \sqrt{3}\ (8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$$

یا: $P = \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 15$

## تمرین

۱ـ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{2}\,(3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72})$$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48})\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\,(5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{54})$$

$$4\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 2\sqrt{18}) - \sqrt{6}\,(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$5\sqrt{7}\,(3\sqrt{7} + 10\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}\,(3\sqrt{7} - 5\sqrt{5})$$

$$3\sqrt{2}\,\left[(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) - (3\sqrt{8} - 4\sqrt{20})\right]$$

$$4\sqrt{10}\,\left[2\sqrt{20} + 3\sqrt{18} - (7\sqrt{8} + 3\sqrt{5})\right]$$

۲- درآمد ۱۲ روزه شخصی ه ریال است و مخارج ۷ روزه او ح ریال تعیین کنید اندوخته او را در مدت $x$ روز و وقتیکه ۹۶=ه ریال و ۲۸=ح ریال و $x=15$ باشد پس انداز او را بدست آورید

۳- بوسیله دو مجری آب داخل استخری میشود اولی در هر ساعت ه ذرع مکعب و دومی در هر پنج ساعت ح ذرع مکعب آب داخل آن میکند این استخر دارای زیرآبیست که در هر چهار ساعت ج ذرع مکعب آب آنرا خارج مینماید معلوم کنید اگر هر سه یکمرتبه باز باشند در $x$ ساعت چند ذرع مکعب آب داخل استخر میشود

## مثال ـ مطلوبست حل معادله ای

$$3x\,(x-1) = 3x^2 + 4x - 1$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$3x^2 - 3x = 3x^2 + 4x - 1$$

و پس از ساده کردن جمله های متشابه دو طرف این مجهولی بدست می آید

$6x = 1$ ، و از آنجا $x = \frac{1}{6}$

## تمرین

مجهولهای زیر را حل کنید :

$4(x+1) - 4 = 3(x-1)$ $\qquad$ $4(3y-5) + 20 = 3(y+9)$

$9p - 3(2p - 4) = 2(5 - p) + 7$

$3y - 9(3y + 4) = 3(y + 9)$

$5(3a - 1) - 7a = 3(a + 6) - 4$

$x - 2(2x - 3) - (x + 6) = 8 - 7(2 - x)$

$7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(12 - x) = -11$

$2z(z - 2) + 5z = z(3z - 4) + 6$

$2y - (5y - y + 1) = -(3 + y) + 15$

مثال ـ مطلوبست حل مجهولی

$$\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{8}{9}$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{18} + \frac{7}{30}x - \frac{1}{6} = \frac{44}{9}$$

دو طرف این مجهولی را در عدد ۹۰ که کوچکترین مضرب برخ نامها است ضرب

میکنیم حاصل میشود

$$۲۵x - ۲۵ + ۲۱x - ۱۵ = ۴۴۰$$

و یا

$$۲۵x + ۲۱x = ۴۴۰ + ۲۵ + ۱۵$$

پس ازساده کردن جمله های متشابه نتیجه میشود

$$۹۶x = ۴۸۰$$

و از آنجا

$$x = ۴۸۰ : ۹۶ = ۵$$

## تمرین

این همچندی را حل کنید:

$$\frac{۱}{۴}(۲۷ - x) = \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۱۰}(۷x - ۵)$$

$$۱ - ۳\left(۷\frac{۱}{۲} + x\right) + ۷\left(\frac{۲x}{۳} - \frac{۵}{۲}\right) + \frac{۸x}{۳} = ۵۰$$

$$\frac{x - ۱}{۷} - \frac{۲۳ - x}{۵} = \frac{x + ۴}{۳} - ۶$$

$$\frac{۸ - x}{۶} + x - ۱\frac{۳}{۲} = \frac{x + ۶}{۲} - \frac{x}{۳}$$

$$\frac{۵a - ۲}{۳} - \frac{a - ۸}{۴} = \frac{a + ۱۴}{۲} - ۲$$

$$\frac{a - ۲}{۳} - \frac{۱۲ - a}{۲} = \frac{۵a - ۳۶}{۴} - ۱$$

$$\frac{۲x - ۵}{۳} - \frac{۵x - ۳}{۴} + ۲\frac{۲}{۳} = ۰$$

$$\frac{۲y + ۱}{۳} + \frac{۲y - ۵}{۲} = ۲ + \frac{۳y - ۱}{۱۵}$$

$$\frac{۳z + ۱}{۱۳} + \frac{۲z - ۵}{۲} = \frac{۴z - ۱}{۵} + \frac{۲ - z}{۲}$$

$$\frac{۴z - ۱}{۱۰} - \frac{۱۰ - z}{۳} + \frac{۲z + ۱}{۶} = ۶\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{3-2x}{3}-\frac{4-x}{4}=\frac{3x-3.85}{0.5}$$

$$\frac{5x-0.4}{0.3}+\frac{1.3-3x}{2}=\frac{1.8-8x}{1.2}$$

$$\frac{5a-1.5}{7}-\frac{5(0.4-2a)}{6}=\frac{9a-0.7}{4}-\frac{7a-1.1}{3}$$

$$\frac{4(13a-0.6)}{5}+\frac{3(1.2-a)}{10}=\frac{9a+0.2}{20}+\frac{5+7a}{4}+a$$

**۱۰۳ـ ضرب دو چند جمله** ـ چون بجای حرفها مقدار عددی قرار دهیم چند جملهٔ حرفی تبدیل بچند جملهٔ عددی میشود بنابراین برای ضرب دو چند جمله میتوان قاعدهٔ (نمرهٔ ۵۰) را بکار برد:

**۱۰۴ـ قاعدهٔ ضرب دو چند جمله** ـ باید هر یک از جمله های یکی از آنها در کلیهٔ جمله های چند جملهٔ دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را جمع جبری نمود.

راه عمل از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱ـ مطلوبست تعیین حاصل ضرب $2x-5$ در $3x+2$ مانند حساب یکی از این دو سازه را زیر سازهٔ دیگر نوشته عمل می کنیم بدین طریق:

$$\begin{array}{l} 2x-5 \\ 3x+2 \\ \hline 6x^2-15x \\ \quad +4x-10 \\ \hline 6x^2-11x-10 \end{array}$$

$6x^2-15x$ ............... حاصل ضرب سازهٔ $2x-5$ در $3x$

$+4x-10$ ............... « « $2x-5$ در $+2$

$6x^2-11x-10$ ........ مجموع حاصل ضربهای جزء و حاصل ضرب کل

برای آسانی عمل چنانکه می بینید بهتر آنستکه در نوشتن حاصل ضربهای جزء جمله های متشابه

آنها زیر یکدیگر نوشته شود

مثال ۲- عبارت $2a^3-7-4a+3a^2$ را در عبارت $a^2-6-5a$ ضرب نموده بازاء $a=2$ درستی عمل را امتحان کنید

برای آسانی این عبارتها را بحسب توانهای صعودی یا نزولی $a$ مرتب نموده مانند مثال ۱ عمل میکنیم مثلاً اگر این دو را بحسب توانهای نزولی $a$ مرتب کنیم خواهیم داشت

$$\begin{array}{rcl}
2a^3+3a^2-4a-7 & = & 16+12-8-7=13 \\
a^2-5a-6 & = & 4-10-6=-12 \quad \times \\
\hline
2a^5+3a^4-4a^3-7a^2 & & -156 \\
-10a^4-15a^3+20a^2+35a & & \\
-12a^3-18a^2+24a+42 & & \\
\hline
2a^5-7a^4-31a^3-5a^2+59a+42 & \text{حاصل ضرب} &
\end{array}$$

که بازاء $a=2$ حاصل ضرب چنین میشود:

$$64-112-248-20+118+42=-156$$

ازین دو مثال عمل ضرب دو چند جمله بدست میآید ازینقرار:

اول دو چند جمله را بحسب توانهای نزولی یا صعودی یکی از حروفها مرتب نموده آنها را زیر هم مینویسیم (بهتر آنستکه چند جمله کوچکتر یعنی آنکه عده جمله هایش کمتر است زیر چند جمله دیگر نوشته شود) بعد هر یک از جمله های پائین را در جمله های بالا ضرب میکنیم و این حاصل ضربهای جزئی را هر کدام در یک سطر زیر یکدیگر طوری مینویسیم که جمله های متشابه در یک ستون قرار گیرد (بمنظور سهولت عمل جمع جمله های متشابه آسان باشد) بعد از جمع جبری جمله های مزبور حاصل ضرب بدست میآید

# تمرین

حاصل ضربهای زیر را بدست آورید:

$2x-4$ در $2x^2-2x-8$

$y^2+2y-3$ در $3y^2-8y-1$

$x^2-2x+4$ در $x^3-x-5$

$5-a^2+a$ در $3a^2-5a^3+a+1$

$5x-2a+(2a-5x)$ در $5x-2a-(2a-5x)$

$2+a^3-2a+3a^2$ در $3a-4a^2+6+a^3$

$$(a-b)^2\cdot(a+b)^2\cdot(a-b+1)^2$$

$$(a+b)^3 \quad ; \quad (a-b)^3 \quad ; \quad (x^2-2ax+a^2)^2$$

$$(a-b)(a+b) \quad ; \quad (x^2y-xy^2)(x^2y+xy^2)$$

$$(x^2y-xy^2)(3xy-4x^2y)(2x^2y-xy^2)$$

$$(m^2+p^2+q^2-mp-mq-pq)(m+p+q)$$

مثال - مطلوبست حل تجندی

$$(3x-1)(2x+5)=(2x+3)^2+2x^2-13$$

پس از عمل ضرب نتیجه میشود

$$6x^2+13x-5=4x^2+12x+9+2x^2-13$$

وچون جمله های متشابه دو طرف را ساده کنیم حاصل میشود

$$x = 1$$

## تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید:

$$(x-4)(x+8) = 7-(2-x)(x+3)$$

$$(a+2)^2-(a+3)^2=-17$$

$$(3x-6)(4x-8) = 12x^2-96$$

$$(x+3)(x+5) = (x+15)(x-10)$$

$$(2y-7)(3y+4) = (y-1)^2+5y^2-11$$

$$(x-5)(x+3)(x+2)-5 = (x^2-x-1)(x+1)$$

$$(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)-(x+2) = (x^2+2)^2+20$$

## و- بخش دو عبارت جبری

**۱۰۵- تعریف** - غرض از بخش کردن (تقسیم کردن) عبارت جبری $a$ (بخشی یا مقسوم) بر عبارت جبری $b$ (بخش یاب یا مقسوم علیه) پیدا کردن عبارت قیمت یابنده $c$ (بهر یا خارج قسمت) بقسمی که حاصل ضرب بس در $b$ مساوی $a$ گردد

پس بنا بتعریف بالا این اتحاد را خواهیم داشت

$$a = bc \qquad (1)$$

وچون خارج قسمت a بر b را میتوان بصورت $\frac{a}{b}$ نوشت

پس خواهیم داشت

$$c = \frac{a}{b} \quad (۲)$$

یعنی خارج قسمت a بر b برخه $\frac{a}{b}$ است که هرگاه آنرا در بخش یاب (b) ضرب کنیم بخشی (a) بدست میآید

بنابراین دو تساوی (۱) و (۲) ازیکدیگر نتیجه شده اند

مثال:

$۵ \times x = ۵x$ زیرا $۵x : x = \frac{۵x}{x} = ۵$

$ax \times x^۲ = ax^۳$ « $ax^۳ : x^۲ = \frac{ax^۳}{x^۲} = ax$

$-۲a^۳ \times a^۲ = -۲a^۵$ « $-۲a^۵ : a^۲ = \frac{-۲a^۵}{a^۲} = -۲a^۳$

$\frac{۳}{۴} \times (-۴) = -۳$ « $-۳ : -۴ = \frac{-۳}{-۴} = \frac{۳}{۴}$

همچنین $m^۵np^۳ : m^۳p^۲ = \frac{m^۵np^۳}{m^۳p^۲} = m^{۵-۳}n \cdot p^{۳-۲} = m^۲np$

زیرا $m^۲np \cdot m^۳p^۲ = m^۵np^۳$

و $۱۲a^۲x^۳y : -۵x^۲y = \frac{۱۲a^۲x^۳y}{-۵x^۲y} = -\frac{۱۲}{۵}a^۲x$

زیرا $-\frac{۱۲}{۵}a^۲x \cdot (-۵x^۲y) = ۱۲a^۲x^۳y$

۱۰۶ - برای یافتن ساده ترین عبارت بهر (یعنی ساده ترین عبارت $\frac{a}{b}$ (فرهٔ ۶۰) را بکار میبریم که هرگاه بخشی و بخش یاب را در سازه ای ضرب یا بر سازه ای تقسیم کنیم بهر تغییر نمی کند

چنانکه بهر $\frac{5x}{x}$ را میتوان بصورت ساده ۵ نوشت (از تقسیم بخشی بخش یاب بر $x$)

وهمچنین در بخش $2a^5$ بر $a^2$ بهر مساویست با $2a^3$ (از تقسیم کردن بخشی و بخش یاب بر $a^2$)

درین دو بخش می بینیم که ساده ترین صورت بهر عبارتیست صحیح.

و در تقسیم $6a^2b$ بر $2ab^2$ ساده ترین صورت بهر برخا ایست مساوی $\frac{3a}{b}$

و در تقسیم $5x^2y$ بر $3ab$ بهر $\frac{5x^2y}{3ab}$ است که هیچ ساده نمیشود

اینک برای بدست آوردن ساده ترین صورت خارج قسمت ها و عبارت جبری های لنها (؟) ذیر را در نظر میگیریم:

۱۰۷ ـ حالت اول ـ تقسیم یک جمله بر یک جمله ـ برای بدست آوردن ساده ترین عبارت بهر کافیست که بخشی و بخش یاب را بر سازه های مشترک تقسیم کنیم

مانند $\frac{-2a^2x}{a}=-2ax$ و $\frac{5a^3}{a^2}=5a$ ، $\frac{-7x^2y^2}{-5ax^2}=\frac{7x^2y^2}{5ax^2}$

و $\frac{12a^6x^2}{-8ax^3}=-\frac{3a^5}{2x}$ ازین چند مثال معلوم میشود:

هرگاه بخشی شامل همه سازه های بخش یاب با نمای بزرگتر یا مساوی باشد درینصورت بهر یک جمله درست میشود (مانند دو مثال اول) و درغیر اینحالت بهر برخه خواهد بود (مانند مثالهای سوم وچهارم.

## پرسشهای شفاهی

در هر یک از بخشهای زیر بهر را بدست آورید:

$a^6$ بر $-a^{12}$    $a^3$ ۱ بر    ... $a^5$

$-xy$ ، $xy^3$     $-x^2$ بر $-x^8$

$-2a^3b^2$ ، $-22ab^6$     $-3bx^3$ ، $15ax^3$

$-4a^3b$ ، $-30a^4b^3$     $-16x^4y^5$ ، $-38x^6y^6$

$-50a^3x^5y^2$ ، $-25a^2x^3y^5$     $-9ax^3y^2$ ، $-45a^4xy^8$

$-10bx^4$ ، $5ax^2$     $-3b^2$ ، $2a^4$

$24xa^2y$ ، $36x^2ab^2$     $-15xy^2$ ، $-3x^2y$

۱۰۸- حالت دوم- تقسیم چند جمله بر یک جمله- هر یک از جمله های بخشی را بر بخش یاب تقسیم نموده (موافق قاعده پیش) بهرهای جزء را جمع جبری مینمائیم

مثال ۱- در تقسیم $x^3 - x^4$ بر $x^2$ بهر چنین است

$$\frac{x^3 - x^4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} = x - x^2$$

زیرا

$$(x - x^2)\,x^2 = x^3 - x^4$$

مثال ۲- تقسیم $12x^3 - 3x^3y^2 + 15x^2y$ بر $-3xy$ بهر چنین است

$$\frac{15x^2y}{-3xy} + \frac{-3x^3y^2}{-3xy} + \frac{12x^3}{-3xy} = -5x + x^2y - \frac{4x^2}{y}$$

## پرسش های شفاهی

مطلوبست تعیین بهر های زیر:

$$\frac{6x^2 - 4x}{2x} \quad \text{،} \quad \frac{x^2y - x^3}{x^2}$$

$$\frac{25x^2y^2 - 30xy^3}{-5xy} \quad \text{،} \quad \frac{8ax - 10a^2x^2}{-2ax}$$

$$\frac{5(x+y)+b(x+y)}{x+y} \quad , \quad \frac{2(a+b)-3(a+b)^2}{a+b}$$

$$\frac{2a(3x-4)-4a(3x-4)}{3x-4}$$

$$\frac{x-y-3(x-y)}{-2(x-y)} \quad , \quad \frac{\sqrt{3x^3}-2\sqrt{3xy}}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{a^2bx-ab^2y}{abc} \quad , \quad \frac{\sqrt{6}(m-2)-\sqrt{3}(m-2)}{\sqrt{3}(m-2)}$$

$$\frac{x^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3-2x(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{x(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

۱۰۹- حالت سوم - تقسیم چند جمله بر چند جمله - برای تعیین صورت ساده‌تر

بهتر درینحالت مانند حساب عمل تقسیم را بجا میآوریم

فرض میکنیم مقصود بخش کردن عدد ۹۹۲ بر ۳۱ باشد صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{r|l} 992 & 31 \\ \cline{2-2} -93 & 32 \\ \hline 62 & \\ -62 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

و چون

$$992 = 9\times10^2+9\times10+2$$

$$31 = 3\times10+1$$

میتوان تقسیم بالا را بدین صورت نوشت

$$\begin{array}{r|l} 9\times10^2+9\times10+2 & 3\times10+1 \\ \cline{2-2} -9\times10^2-3\times10 \quad\quad & 3\times10+2 \\ \hline +6\times10+2 & \\ -6\times10-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

در این تقسیم اگر بجای ۱۰ عدد کلی $a$ را قرار دهیم معلوم میشود که در تقسیم چند جمله $9a^2+9a+2$ بر $3a+1$ بهر مساوی $3a+2$ میباشد

صورت عمل چنین است :

$$
\begin{array}{l|l}
9a^2+9a+2 & 3a+1 \\
\cline{2-2}
-9a^2-3a & 3a+2 \\
\cline{1-1}
\quad\; +6a+2 & \\
\quad\; -6a-2 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

ازین مثال میتوان قاعده زیر را نتیجه گرفت :

۱۱۰ - قاعده - پس از ساده کردن چند جمله های مقسوم و مقسوم علیه آنها را نسبت بتوانهای نزولی (یا صعودی) یکی از حرفها مرتب نموده بطریقه زیر عمل مینمائیم :

جمله اول بخشی را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می نمائیم و حاصل را از جمله های بخشی میکاهیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جمله اول مانده را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله های این مانده کم میکنیم تا دومین مانده بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا به مانده صفر و یا بمانده ای برسیم که درجه اش از درجه بخش یاب کمتر باشد .

مثال ۱ - مطلوبست تعیین بهر در تقسیم $a^3+2a^2b-b^3$ بر $a+b$

چون چند جمله بخشی و بخش یاب را برحسب حرف $a$ مرتب نموده از روی قاعده بالا عمل کنیم نتیجه میشود

$$\begin{array}{l|l} a^3+2a^2b\quad -b^3 & a+b \\ \cline{2-2} -a^3-a^2b & a^2+ab-b^2 \\ \hline \quad a^2b & \\ \quad -a^2b-ab^2 & \\ \hline \qquad -ab^2-b^3 & \\ \qquad +ab^2+b^3 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

در این بخش بخشی بر بخش یاب بخش پذیر (قابل قسمت) بوده و میتوان چنین نوشت

$$a^3+2a^2b-b^3=(a+b)(a^2+ab-b^2)$$

**مثال ۲- $a^3$ را بر $a-1$ تقسیم کنید**

از روی قاعده بالا راه عمل چنین است

$$\begin{array}{l|l} a^3 & a-1 \\ \cline{2-2} -a^3+a^2 & a^2+a+1 \\ \hline \quad +a^2 & \\ \quad -a^2+a & \\ \hline \qquad +a & \\ \qquad -a+1 & \\ \hline \qquad\quad +1 & \end{array}$$

درین مثال بهر را که بصورت $\frac{a^3}{a-1}$ است میتوان چنین نوشت

$$\frac{a^3}{a-1}=a^2+a+1+\frac{1}{a-1}$$

زیرا اگر دو طرف بهر را در $a-1$ (بخش یاب) ضرب کنیم $a^3$ (بخشی) بدست میآید

در اینجا میگوئیم بخشی بر بخش یاب بخش پذیر نیست و بهر یعنی $a^2+a+1+\frac{1}{a-1}$

تشکیل شده است از جزء درست $a^2+a+1$ و جزء برخه $\frac{1}{a-1}$. عدد ۱+ را مانده این تقسیم گویند.

تبصره - فرض میکنیم $Q$ جزء درست بهر و $R$ مانده تقسیم $A$ بر $B$ باشد بنا بر آنچه گفتیم خواهیم داشت:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad (۱)$$

اگر بخصوص $R = 0$ باشد تقسیم درست است و خواهیم داشت

$$\frac{A}{B} = Q$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را در $B$ ضرب کنیم این تساوی بدست میآید

$$A = BQ + R \qquad (۲)$$

یعنی بخشی مساویست با مجموع مانده و حاصل ضرب بخش یاب در جزء درست بهر

و در حالتیکه مانده صفر باشد تساوی (۲) نوشته میشود

$$A = BQ$$

یعنی بخشی مساویست با حاصل ضرب بخش یاب در بهر

تمرین

در هریک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید

$a^2 + 10a + 24$ بر $a + 4$

$2p^2-3p-2$ بر $2p+1$

$x^2+x-6$ « $x-2$

$y^3-11y-6$ « $y+3$

$6y^2+19y-7$ « $3y-1$

$2a^2+ab-2b^2$ « $2a-b$

$9x^2+6xy-8y^2$ « $3x-2y$

$2a^3+ab-2b^2$ « $3a-2b$

$2a^3-14a^2+14a-12$ « $2a-4$

$32x+6x^3-24-23x^2$ « $2x-3$

$3y^4+11y^3-2y^2+17y-4$ « $y-3y^2-4$

$28x^4-90xy^3+156x^2y^2+9xy^2+28y^4$

$4x^2-10xy$

$(53a+8-52a^2+12a^3)$ بر $(4a^2-7a-1)$

$(x^3-y^3):(x\pm y)$ و $(x^3+8):(x+2)$

$(x^4-16):(x\pm 4)$ و $(27x^3+8y^3):(3x+2y)$

$(y^6\pm 1):(y\pm 1)$ و $(a^5\pm b^5):(a\pm b)$

۱۱۱ - **چند جمله ایهای حرفی** - هرگاه در یک چند جمله ای مقادیر معلوم بصورت کلی یعنی با حرف نموده شده باشد چند جمله ای را چند جمله ای حرفی نامند

هر همچندی حرفی درجه اول پس از از بین بردن برخه نما ها و ساده کردن جمله های متشابه دو طرف

بصورت کلی $ax = b$ در میآید

برای حل این همچندی یعنی برای تعیین $x$ ریشه آن باید دو طرف را بر $a$ (ضریب $x$)

تقسیم نمود ($a$ باید مخالف صفر باشد)

تبصره - از تقسیم دو طرف تساوی $0 \times 5 = 0 \times 7$ بر صفر لازم میآید که $5 = 7$

باشد که محال است

بنابراین نباید هیچوقت دو طرف یک تساوی را بر صفر تقسیم نمود زیرا علاوه بر اینکه نمیتوان

در تقسیم یکعدد بر صفر بهر را بدست آورد ممکن است نتیجه غلطی بدهد.

مثال ۱ - مطلوبست حل همچندی

$$5x - 2a = 10a + 3x$$

مجهول را بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود

$$5x - 3x = 10a + 2a$$

$\therefore$ $2x = 12a$ و از آنجا $x = 6a$

مثال ۲ - مطلوبست حل همچندی

$$ax + 5a = a^2 + 6 + 3x$$

مانند مثال پیش نتیجه میشود $ax - 3x = a^2 - 5a + 6$

پس از جمع دو جمله متشابه طرف اول حاصل میشود

و یا

$$(a-3)x = a^2 - 5a + 6$$

$$x = \frac{a^2 - 5a + 6}{a-3} = a - 2$$

## تمرین

۱- معادلات زیر را حل کنید

$$5ax - 10a^2 = 5ac \qquad mx + m = 5m$$

$$12a - 3(a - x) = 0 \qquad x - m = m + n$$

$$ay - (a - c) = 3a + c$$

$$3ax + 2ab = 6ab + 2ax - 3ab$$

$$mx + n^2 = 4m^2 - (mx - n^2)$$

$$ax + bx = a^2 - b^2 \quad ; \quad ax - 2a^3 - 1 = a^2 - x$$

۲- دارائی شخصی را معلوم کنید در صورتیکه مبلغ پول موجود او $a$ ریال و وام او $b$ ریال باشد در حالتهای مخصوص یعنی اگر ($a > b$ و یا $a = b$ و یا $a < b$) باشد نتیجه را تعبیر کنید

۳- دو نفر اولی $a$ ریال و دومی $b$ ریال پول دارد اولی به دومی $c$ ریال بدهکار است و دومی باولی $d$ ریال مبلغ دارائی هر یک چقدر میشود و تفاوت بین دارائی آنها چه مبلغ است؟

۴- شخصی در یک روز $a$ ریال بحساب خود در بانک گذاشت و در همان روز $b$ ریال از بانک گرفت معلوم کنید در این روز چه مبلغ بر پس انداز او علاوه شده است. اگر $a = 250$ و $b = 520$ باشد تعبیر جواب چیست؟

۵ - زمینی است زراعتی به درازای $a$ متر و به پهنای $b$ متر و در آن خیابانی است به پهنای ۲٫۲۵ متر که درین زمین واقع شده حساب کنید مساحت قسمت زراعتی زمین را ( در حالتهای مخصوص : $a=75$ و $b=46$ همچنین $a=125{,}15$ و $b=82{,}44$ )

۶ - باغی را به مبلغ $a$ ریال خریدیم و بمبلغ $b$ ریال فروختیم معلوم کنید صدی چند عمل شده است (حالتهای مخصوص $a=12000$ و $b=12900$ و همچنین $a=8400$ $b=7500$ )

۷ - پارچه‌ای پس از شستن باندازهٔ $\frac{3}{100}$ درازایش کوتاه میشود یک توپ ازین پارچه پس از شستن به درازای $a$ متر شده است درازای آن را پیش از شستن معلوم کنید ( حالتهای مخصوص : $a=23{,}95$ و $a=19{,}4$ )

۸ - شخصی درازای مزرعه‌ای را با قدم خود اندازه گرفت خیال کرد که اگر درازای هر قدمش ۰٫۷۴ متر باشد با این حساب درازای مزرعه $a$ متر میشود و بعد درازای قدمش را بطور متوسط اندازه گرفت معلوم شد که مساوی ۰٫۷۴ متر است معلوم کنید درازای حقیقی مزرعه را

۹ - درازای پارچه‌ای با متری که $b$ سانتی متر کوتاه است $a$ متر میباشد درازای واقعی آن چقدر است؟ ( حالت مخصوص $b=3$ و $a=15$ )

۱۰ - اطاقی است بشکل مستطیل بدرازای $a$ متر و به پهنای $b$ متر میخواهیم سطح آنرا از آجری بشکل مربع بضلع ۲۰ سانتی متر فرش کنیم چند آجر لازم است؟ ( حالتهای مخصوص : $a=12$ و $b=7$ همچنین $a=15$ و $b=8$ )

۱۱- شخصی $a$ ریال پول دارد اگر $b$ ریال بیشتر میداشت میتوانست $\frac{3}{5}$ بدهی خود را بپردازد معین کنید مبلغ بدهی او را (حالتهای مخصوص $a=150$ و $b=25$ همچنین $a=65$ و $b=70$)

۱۲- فاصلهٔ بین دو شهر $d$ کیلومتر است اتومبیلی با تندی $a$ کیلومتر در ساعت مدت $b$ ساعت حرکت نموده چقدر تا شهر دوم فاصله دارد؟ (در حالت مخصوص $d=125$ و $a=50$ و $b=3$ در جواب مسئله تحقیق کنید)

۱۳- فاصلهٔ بین دو شهر $d$ کیلومتر است مسافری قسمتی از آن را که $a$ برابر قسمت دیگر است پیموده معلوم کنید چند کیلومتر پیموده و چند کیلومتر دیگر باقی مانده (حالتهای مخصوص: $d=120$ و $a=3$ همچنین $d=150$ و $a=4$)

۱۴- مسافری فاصلهٔ بین دو شهر را که $d$ کیلومتر است در مدت $t$ ساعت می‌پیماید به قسمی که $\frac{3}{4}$ آن را با تندی متوسط $a$ کیلومتر در ساعت طی کرده است معلوم کنید تندی متوسط مسافر را در بقیهٔ راه (حالت مخصوص $d=180$ و $t=6$ و $a=30$)

۱۵- فاصلهٔ بین دو شهر $d$ کیلومتر است اتومبیل $A$ این فاصله را در $t$ ساعت می‌پیماید اتومبیل $B$ دو دقیقه بعد از اتومبیل $A$ حرکت کرده ۲۵ دقیقه زودتر از آن بشهر دوم میرسد معین کنید اولاً مدتی را که اتومبیل $B$ در حرکت بوده ثانیاً تندی متوسط اتومبیل $B$ را ثالثاً تفاوت تندیهای متوسط $A$ و $B$ را (حالت مخصوص $d=87$ و $t=3$)

۱۶- شناگری در دقیقهٔ اول $a$ متر و در هر دقیقهٔ بعد ۲۵ سانتی متر کمتر از دقیقهٔ پیش شنا میکند

معلوم کنید پس از ۴ دقیقه چند متر شنا کرده است، و درین مدت بطور متوسط دقیقه‌ئی چند متر در آب جلو رفته است

۱۷- درازای استخر شنا $\alpha$ متر است اگر شناگری بتواند بطور متوسط دقیقه‌ئی ( $a$ - ۰٫۷۰ ) متر در آب پیش رود پس از چه مدتی درازای استخر را می پیماید ( حالتهای مخصوص : $\alpha$ = ۶۳٫۲۵ و $a$ = ۳۷٫۲۵ همچنین $\alpha$ = ۴۳٫۶۵ و $a$ = ۳۵٫۲۵ )

۱۸- باغی بشکل مستطیل که درازای آن $a$ متر بیش از پهنایش میباشد و پهنایش $\frac{۲}{۳}$ درازایش است حساب کنید درازا و پهنا و مساحت باغ را ( حالتهای مخصوص : $a$ = ۸۰ و $a$ = ۱۲۰ )

۱۹- قیمت $a$ کیلوگرم گوشت $b$ ریال است میدانیم که $\frac{۱}{۴}$ آن استخوان است معلوم کنید قیمت یک کیلوگرم گوشت بی استخوان را ( حالت مخصوص $a$ = ۸ و $b$ = ۲۲ )

۲۰- درآمد سالیانه شخصی $a$ ریال است و مخارجش $b$ ریال معلوم کنید پس از چند سال مبلغ $c$ ریال پس انداز خواهد کرد؟ حالت مخصوص ( $a$ = ۱۲۰۰۰ و $b$ = ۷۰۰۰ و $c$ = ۱۵۰۰۰ )

۲۱- مبلغ $a$ ریال بین ۵ نفر تقسیم میشود و دو نفر آنها هر یک $b$ ریال بیشتر سهم میبرند حساب کنید سهم هر یک را ( حالت مخصوص $a$ = ۱۵۰ و $b$ = ۱۲٫۵ )

۲۲- هر ۳۵ یارد تقریباً مساوی ۳۲ متر است معلوم کنید ۶۴ متر چند یارد و $n$ یارد چند متر است؟

۲۳- هر ۵ رده سانتی متر تقریباً مساوی ۲٫۱۵ اینچ است دستور تبدیل $c$ سانتی متر را به $x$ اینچ پیدا کنید

۲۴ - مجموع سه عدد متوالی را حساب کنید درصورتیکه عدد وسط مساوی $a$ باشد؛ $\frac{1}{2}$ این مجموعه را بدست آورید (حالتهای مخصوص: $a=12$ ، $a=-5$ و $a=-1$ ، $a=120$ و $a=0$).

۲۵ - مزد روزانه پدری $a$ ریال و مزد روزانهٔ پسرش $b$ ریال کمتر است مخارج آنها در روز $\frac{2}{3}$ درآمد روزانهٔ آنهاست معلوم کنید مبلغ پس‌انداز آنها را پس از د روز (حالت مخصوص $a=250$ و $b=2$).

۲۶ - درازای ضلع‌های مثلثی $a$ ، $b$ و $c$ و درازای محیط آن $2p$ است هر یک از عبارتهای $b+c-a$ و $a+b-c$ و $a+c-b$ را برحسب $p$ و یکی از اضلاع حساب کنید.

۲۷ - شخصی مقداری پارچه خرید به $a$ ریال در فروش آن صدی پانزده خرید نفع برد مبلغ نفع و مبلغ فروش او را حساب کنید (حالت مخصوص $a=2450$).

# فصل چهارم

## اتحادهای مهمّ

۱۱۲- چنانکه پیش گفتیم اتحاد تساوی بین دو عبارت جبری است بقسمی که چون در هر عبارت عمل‌های لازم را انجام دهیم دو طرف عین یکدیگر شوند. بنابراین باید دو طرف یک اتحاد بازاء هر مقدار عددی که بجای حرفها گذاشته میشود با یکدیگر مساوی شود.

چون در اعمال جبری دانستن بعضی از اتحادها لازم است بنابراین باید دانش آموزان همواره این اتحادها را که اکنون میگوئیم بخاطر داشته باشند:

۱۱۳- اتحاد ۱- توان دوم یک دوجمله- چون دوجمله $a+b$ و همچنین $a-b$ را بتوان ۲ رسانیم حاصل میشود:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

بنابراین این دو اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

یعنی: توان دوم یک دوجمله مساویست با مجموع توانهای دوم

دو جمله آن بعلاوهٔ دو برابر حاصل ضربشان (هر جمله را با نشانه‌اش باید در نظر گرفت).

نتیجه - از تفریق دو اتحاد بالا این اتحاد بدست میآید

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

یعنی: توان دوم مجموع دو جمله منهای توان دوم تفاضل همان دو جمله مساویست با چهار برابر حاصل ضرب آن دو جمله.

بنابر اتحادهای بالا

$$(a+1)^2=a^2+2a+1$$

$$(x-3)^2=x^2-6x+9$$

$$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$$

$$(2x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

$$(a+1)^2-(a-1)^2=4a$$

$$(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2=4\sqrt{5}$$

$$(2x+y)^2-(2x-y)^2=8xy$$

تبصرهٔ ۱ - میدانیم که دو عدد قرینه دارای یک توان دوم هستند پس:

$(a-b)^2=(b-a)^2$ و $(a+b)^2=(-a-b$

## پرسش‌های شفاهی

حاصل این عبارتها را بدست آورید

$(7x - a)^2$ و $(10 - y)^2$ و $(x + 1)^2$

$(a + 2x)^2$ و $(2x - 1)^2$ و $(x - 2a)^2$

$(\sqrt{5} - 2)^2$ و $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ و $(3x - y)^2$

$(2\sqrt{2} - 1)^2$ و $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ و $(2x - 5y)^2$

$(y + \sqrt{5})^2 - (y - \sqrt{5})^2$ و $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$

$(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^2 - (x\sqrt{2} - y\sqrt{3})^2$ و $(2\sqrt{2} + 1)^2 - (2\sqrt{2} - 1)^2$

تبصره ۲- از روی اتحادهای (۱) میتوان بعضی از عددها را در ذهن بتوان دوم رسانید

مانند $(21)^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

## پرسش‌های شفاهی

عددهای زیر را بتوان دوم برسانید

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴۱ | ۱۹ | ۷۱ | ۳۱ |
| ۷۸ | ۱۹۹ | ۱۰۱ | ۲۹ |

تبصره ۳- هرگاه بخواهیم یک سه جمله را بتوان دوم برسانیم چون دو جمله آنرا یک جمله فرض کنیم میتوانیم از روی اتحاد (۱) آنرا بتوان دوم برسانیم.

چنانکه توان دوم سه جمله $a+b-c$ را میتوان چنین نوشت

$$(a+b-c)^2=\left[(a+b)-c\right]^2$$

$$=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$$

و چون $(a+b)$ را بتوان دوم برسانیم و حاصل $2a+2b\cdot c-$ را بدست آوریم
توان دوم سه جمله $a+b-c$ چنین میشود

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

و همچنین برای اینکه یک چهار جمله را بتوان دوم برسانیم کافی است که هر دو جمله
آنرا یکجمله فرض کنیم

مثال - $(a-b+c-d)^2=\left[(a-b)+(c-d)\right]^2=$

$$(a-b)^2+2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$

پس از انجام عمل های لازم حاصل چنین میشود

$$(a-b+c-d)^2=$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$$

ازین مثالها و مثالهای دیگر این قاعده برای بدست آوردن توان دوم یک
چند جمله نتیجه میشود :

**توان دوم یکچند جمله مساویست با مجموع توانهای دوم جمله های آن**
**بعلاوه دو برابر حاصل ضرب هر جمله در جمله های دیگر ، هر جمله را با نشانه اش**

در نظر بگیرید)

## تمرین

۱- چند جمله‌ای‌های زیر را بتوان دوم برسانید:

$(2b + 2 - \sqrt{3})$ $(a - 2b - c)$ $(x - y + 1)$

$(-a - 2b - \sqrt{5})$ $(2x - 3y + 2z)$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})$ $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)$

$(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5})$ $(\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})$

$(2x - 3y - 2a - 3b)$ $(x - y - a + 1)$

۲- درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = \sqrt{47 + 6\sqrt{10}}$ $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1$

$5 - 2\sqrt{7} = -\sqrt{53 - 20\sqrt{7}}$ $2\sqrt{7} - \sqrt{6} = \sqrt{34 - 4\sqrt{42}}$

$\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$

۳- مستطیلی است به درازای $a$ و پهنای $b$ بر این مستطیل و مربع بضلع $a$ و $b$ اضافه کنید و از سطح حاصل مربعی بضلع $a - b$ بردارید ثابت کنید که مساحت باقیمانده سه برابر مساحت مستطیل مفروض است

۱۱۴- اتحاد ۲- حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها- چون دو جملهٔ $a + b$ را در دو جملهٔ $a - b$ (دو عبارت $a + b$ و $a - b$ را مزدوج یکدیگر

کوئید، ضرب کنیم این اتحاد بدست میآید :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

یعنی: حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها مساویست با توان دوم جملهٔ اول (کاهش یاب) منهای توان دوم جملهٔ دوم (کاست).

مثال-

$$(a+2)(a-2)=a^2-4$$

$$(x-2y)(x+2y)=x^2-4y^2$$

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})=a+b-(a-b)$$

$$=a+b-a+b=2b$$

$$\sqrt[3]{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{8-3\sqrt{7}}=\sqrt[3]{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})}$$

$$=\sqrt[3]{64-63}=\sqrt[3]{1}=1$$

## پرسش های شفاهی

عبارت زیر را در مزدوج خود ضرب کنید

| | | |
|---|---|---|
| $4a-b$ | $1+3x$ | $x^2+3$ |
| $a^2-5$ | $4xy-2$ | $7x-y$ |
| $ax-by$ | $xy-y^2$ | $a^2+2x^2$ |
| $3-2\sqrt{7}$ | $2\sqrt{3}-5$ | $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ |

## تمرین

حاصل عبارتهای زیر را معلوم کنید:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{13}+5} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} \qquad \sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}$$

$$(\sqrt{x^2+9}+3)(3-\sqrt{x^2+9})$$

$$\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$$

$$(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-x^2}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$$

## ۱۱۵-۱ اتحاد ۳- حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند.

چون دو جمله ای $x+a$ را در دو جمله ای $x+b$ ضرب کنیم چنین میشود:

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \quad\; +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

بنابراین اتحاد زیر بدست میآید:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

یعنی: حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند مساویست با توان دوم جمله مشترک بعلاوه حاصل ضرب مجموع دو جمله غیر مشترک در جمله مشترک بعلاوه حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک (باید هر جمله را با نشانه خود در نظر گرفت).

مثال

$$(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+6=x^2+5x+6$$

$$(x-5)(x-3)=x^2+(-5-3)x+15=x^2-8x+15$$

$$(x+4)(x-7)=x^2+(4-7)x-28=x^2-3x-28$$

$$(2\sqrt{b}-a)(\sqrt{b}-a)=a^2-3a\sqrt{b}+2b$$

## پرسش‌های شفاهی

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید

$(x+5)(x+7)$ — $(a+1)(a+2)$

$(a-3)(a-8)$ — $(y-2)(y-5)$

$(y-2)(y+2)$ — $(x-8)(x+5)$

$(x-2\sqrt{2})(x+3\sqrt{2})$ — $(y-3)(y+7)$

$(a^2-6a+8):(a-4)$ — $(x^2+3x+2):(x+2)$

$(x^2-x-20):(x-5)$ — $(a^2-a-6):(a-3)$

۱۱۶- توان سوم دو جمله - توان سوم یک دو جمله مساویست با مجموع توانهای سوم هر جمله بعلاوه سه برابر توان دوم هر جمله در جمله دیگر (هر جمله با قید نشانه خود)

یعنی: $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

## تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$$

$$(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) - 2x(3x-5)^2$$

$$(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) + (a+c)(c+a)$$

۲- ثابت کنید که تساویهای زیر اتحادند:

$$(\sqrt{7}-\sqrt{4})(\sqrt{7}+\sqrt{4}) - (\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 0$$

$$(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5}) - (\sqrt{3}-1)^2 = 2\sqrt{3}$$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

$$(a+\sqrt{x})^3 + (a-\sqrt{x})^3 = 2a^3 - 6ax$$

# فصل پنجم

## تجزیه عبارتها بحاصل ضرب سازه‌ها

۱۱۲- تعریف - هر عبارت جبری که جز بر خود و یک (بدون قید نشانه) بر عبارت دیگری بخش پذیر نباشد آنرا اول گوئیم (مانند اعداد اول در حساب)

چند جمله‌ای $2x+1$ و $2a-b$ و $x^2+1$ هر یک عبارتی اول هستند

بنابراین هرگاه عبارتی غیر اول باشد یعنی بر عبارت دیگری بخش پذیر باشد تبدیل بحاصل ضرب دو سازه میشود (نمره ۱۱۰ تبصره)

ممکن است که هر یک از این دو سازه نیز تبدیل بحاصل ضرب دو سازه دیگر شود و چون این عمل را ادامه دهیم بالاخره عبارت مفروض بحاصل ضرب چندین سازه اول تجزیه میگردد

این عمل را تجزیه بحاصل ضرب سازه‌ها گویند

چنانکه عبارتهای $ab$ و $x^2$ و $12cx^2$ و $4x-4$ و $ax^2+a$ عبارتهای غیر اولند که اولی بر دو سازه $a$ و $b$ و دومی بر $x$ وسومی بر سازه‌های ۳ و ۴ و $c$ و $x$ وچهارمی بر سازه‌های ۴ و $x-1$ و پنجمی بر سازه‌های $a$ و $x^2+1$ بخش پذیر و پس از تجزیه هر یک بسازه‌های اول میتوان چنین نوشت:

$ab = a . b$

$x^2 = x . x .$

$12 c^2 x = 3 . 4 . c . c . x$

$4x - 4 = 4 \times (x - 1$

$ax^2 + a = a.(x^2 + 1)$

تجزیه بسازه های اول یکی از قسمت های مهم جبر و مقابله است که در ساده کردن برخه ها و عملهای جبری و حل مسئله ها بکار میرود و در اینجا بعضی از قاعده های ساده آن را میگوئیم :

۱۱۸ - الف - تجزیه چند جمله وقتی که جمله های آن دارای سازه مشترکی باشند -

در چند جمله $ab + ac - ad$ جمله های آن دارای سازه مشترک $a$ میباشند بنابراین چند جمله بر سازه $a$ بخش پذیر است پس :

$$ab + ac - ad = a( b + c - d )$$

یعنی چند جمله بالا بحاصل ضرب دو سازه $a$ و $(b + c - d)$ تجزیه شده است که چون این دو سازه در هم ضرب شوند چند جمله مفروض بدست میآید

قاعده - نخست سازه مشترک جمله های چند جمله را تعیین میکنیم پس از آن چند جمله مفروض را بر این سازه مشترک تقسیم نموده بهر این تقسیم را بدست میآوریم و عبارت مفروض مساوی حاصل ضرب آن سازه

مشترک درین بهر خواهد بود.

مثال ۱- جمله های چند جمله $7a^3x - 15a^2$ بر $a^2$ تقسیم پذیر یعنی $a^2$ سازهٔ مشترک بین جمله های آن میباشد چون آنرا بر $a^2$ تقسیم کنیم بهر مساوی $7ax-15$ میشود

بنابراین $$7a^3x - 15a^2 = a^2(7ax - 15)$$

مثال ۲- عبارت $\sqrt{3}(a-b) - \sqrt{2}(a-b)$ بر $a-b$ بخش پذیر است و بهر $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ میباشد پس:

$$\sqrt{3}(a-b) - \sqrt{2}(a-b) = (a-b)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

مثال ۳- عبارت $3\times5\times17 - 3\times5\times14$ را حساب کنید.

از روی تجزیه چنین خواهیم داشت

$$3\times5\times17 - 3\times5\times14 = 3\times5(17-14) = 3\times5\times3 = 45$$

## پرسش های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

| | | |
|---|---|---|
| $(15)^2$ | $(24)^2$ | $(21)^2$ |
| $2x-2$ | $-36a^2b^3$ | $12abc$ |
| $ax+cx$ | $5x^2+10x$ | $ax+a$ |
| $ax+acx$ | $3ax-6a$ | $ac-c^2$ |
| $2ae-abc$ | $12ax-10bx$ | $5ax^2-x^2$ |

$۲ax - ۴ab$ $\quad$ $۳ax + ۶bx$ $\quad$ $-۲ax^۲ + a^۲x$

$ab + ax + ay$ $\quad$ $acx - ۳ac - c^۲$ $\quad$ $۲ay - ۴y^۲ + ۶ay$

## تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصلضرب سازه‌ها تبدیل کنید

$ax - a^۲x^۲ - a^۳x$ $\qquad$ $۳ax - ۱۵a^۲$

$ay - abc - aby$ $\qquad$ $۳c^۲ - ۱۲c - ۱۸c^۴$

$۲c^۲ - ۱۵c + ۵c^۳$ $\qquad$ $a^۲ - ۲ax + a$

$۸a^۲ - ۴a^۶ + ۱۲a^۳ - ۶a^۵$ $\qquad$ $a^۴ - a^۳ + a^۲ + a$

$۱۲ax^۲ - ۲x\sqrt{۲} + bx^۲\sqrt{۶}$ $\qquad$ $۸ax - ۴bx + ۱۲x\sqrt{۵}$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید:

$my = am + bm - cm$ $\qquad$ $ax = am - ac$

$۴ax = ۲ab - ۸ac + ۴a^۲$ $\qquad$ $۲ax = ۶ab - ۱۲a^۲$

۳- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$۳ \times ۱۵ \times ۱۲ \times ۱۷ - ۳ \times ۱۵ \times ۱۲^۲$$

$$\frac{۲۲}{۷}(۲۱)^۲ + \frac{۲۲}{۷}(۱۴)^۲ - \frac{۲۲}{۷}(۲۱ \cdot ۱۴)$$

$$۵۷۴۲ \times (۱۳)^۲ + ۵۷۴۲ \times ۶۵ + \frac{۴ \times ۵۷۴۲ \times ۱۳ \times ۱۲}{۲}$$

۱۱۹- ب - تجزیهٔ چند جمله‌ای بوسیلهٔ دسته بندی - دسته بندی یعنی دسته

کردن جمله های یک چند جمله‌ئی که جمله های هر دسته دارای سازهٔ مشترکی باشند:
مانند چند جملهٔ $ax + by + bx + ay$ که آنرا میتوان بدو دسته $ax + bx$ و
$ay + by$ تبدیل نمود دستهٔ اوّل دارای سازهٔ مشترک $x$ و دستهٔ دوّم دارای سازهٔ
مشترک $y$ میباشند بنابراین خواهیم داشت

$$ax + by + bx + ay = x(a+b) + y(a+b)$$

وحالا دیده میشود که طرف دوّم این تساوی بر $a + b$ بخش‌پذیر است پس

$$ax + by + bx + ay = (a+b)(x+y)$$

بطور کلّی هر عبارتی که مانند عبارت بالا یعنی بصورت $ax + by + bx + ay$ باشد
بوسیلهٔ دسته بندی تجزیه پذیر میباشد.

مثال ۱ - چند جملهٔ $۲bx^۳ - ۳abx^۲ + ۲cx - ۳ac$ را بحاصل ضرب سازه‌ها
تجزیه کنید

چون چند جملهٔ مفروض را بدو دستهٔ $۲bx^۳ - ۳abx^۲$ و $۲cx - ۳ac$
تبدیل کنیم و هر یک از این دو دسته را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه نمائیم چنین خواهیم داشت

$$۲bx^۳ - ۳abx^۲ + ۲cx - ۳ac = bx^۲(۲x - ۳a) + c(۲x - ۳a)$$

طرف دوّم این تساوی بر $۲x - ۳a$ بخش‌پذیر است پس:

$$۲bx^۳ - ۳abx^۲ + ۲cx - ۳ac = (۲x - ۳a)(bx^۲ + c)$$

مثال ۲ - مطلوبست تبدیل عبارت $۶ + \sqrt{۶} + ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳}$ بحاصل ضرب

سازه‌ها؛

در دو جمله اول و سوم عدد ۳ و در دو جمله دیگر $\sqrt{۳}$ سازهٔ مشترک است بنابراین میتوان چنین نوشت:

$$۶+\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}=۳(۲+\sqrt{۲})+\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۲)$$

$$=(۲+\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۳})$$

مثال ۳- میخواهیم عبارت

$$۱+xy+a(x+y)-(x+y)-a(۱+xy)$$

را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنیم

$xy+۱$ را یکجمله فرض می‌کنیم بنابراین با جملهٔ آخر دارای سازهٔ مشترک $۱+xy$ میباشد و دو جملهٔ دیگر عبارت مفروض دارای سازهٔ مشترک $x+y$ است پس عبارت بالا مساوی

$$(۱+xy)(۱-a)+(x+y)(a-۱)$$

و یا مساوی $(۱+xy)(۱-a)-(x+y)(۱-a)$ میشود.

سازهٔ مشترک این عبارت $۱-a$ است بنابراین عبارت مفروض بدین صورت درمیآید

$$(۱-a)(۱+xy-x-y)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه پذیر است زیرا اگر آن را بدو دستهٔ $xy-x$ و $۱-y$ تبدیل کنیم و در دستهٔ اول $x$ و در دستهٔ دوم ۱ را سازهٔ مشترک قرار دهیم داخل پرانتز

مساوی

$x(y-1)-(y-1)$ یا $(y-1)(x-1)$ میشود

پس عبارت بالا بصورت حاصل ضرب

$(1-a)(y-1)(x-1)$ یا $(1-a)(1-y)(1-x)$ درمیآید

مثال ۴ ـ مطلوبست حل چندی

$$abx+x=abc+c-2ab-2$$

دو طرف را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه میکنیم پس خواهیم داشت:

$$x(ab+1)=c(ab+1)-2(ab+1)$$

و یا

$$x(ab+1)=(ab+1)(c-2)$$

و اگر $ab+1\neq 0$ باشد ریشهٔ چندی چنین است:

$$x=c-2$$

تمرین

۱ ـ عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$x^3+x^2+x+1$ — $ax+2x+ay+2y$

$ay(a-b)+ax(b-a)$ — $a(c-y)-b(y-c)$

$ax+2a-bx-2b$ — $3ax-6bx-ay+2by$

$a^3-2ax-a^2x+2x^2$ — $x^2-ay+axy-x$

$a^2c - acx + acx^2 - a^2cx$

$12ax^5 - 6ax^3 - 4x^5 + 2x^3$

$10 + \sqrt{24} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$

$4\sqrt{18} - 6\sqrt{15} - 2\sqrt{30} + 15$

۲- $ab$ و $ac$ مساحتهای دو مستطیلند که پهلوهای آن ($a$ و $b$) و ($a$ و $c$) میباشند راست گوشه‌ای (مربع مستطیلی) پیدا کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۳- در مسئله پیش راست گوشه‌ای پیدا کنید که مساحتش برابر تفاضل مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۴- $a$ و $b$ و $c$ و $d$ نمایش چهار درازا میباشند ثابت کنید که مجموع چهار مستطیل $ab$ و $ac$ و $bc$ و $bd$ را میتوان بیک راست گوشه تبدیل کرد که از حیث مساحت با مجموع آنها برابر باشد (از روی شکل نیز همین مطلب را به ثبوت رسانید)

۵- در عبارت $ac - bc + ad - bd$ که $a$ و $b$ و $c$ و $d$ نمایش چهار درازا میباشند - اول معنای هندسی عبارت بالا را بگوئید دوم آن عبارت را بسازه‌های اول تجزیه نموده و تعبیر هندسی تساوی حاصل را بیان کنید.

۱۲۰- ج - تجزیهٔ سه جمله‌هائیکه بصورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ میباشند - از اتحاد (۱) معلوم میشود:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

یعنی: هر سه جمله ای که مرکب از مجموع توانهای دوم دو سازه بعلاوه (یا منهای) دو برابر حاصل ضربشان باشد بتوان دوم مجموع (یا تفاضل) آن دو تبدیل میگردد.

مثال - در سه جمله $25a^4 + 60a^2b + 36b^2$ ، دو جمله اول و آخر بترتیب توان دوم دو سازه $5a^2$ و $6b$ میباشد و جمله $60a^2b$ برابر است با $2 \times 5a^2 \times 6b$ بنابراین این سه جمله را بتوان چنین نوشت

$$25a^4 + 60a^2b + 36b^2 = (5a^2 + 6b)^2$$

همچنین سه جمله $4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2$ تشکیل شده است از مجموع توانهای دوم $2x^2$ و $3a^3$ و جمله $-12a^3x^2$ که مساویست با $-2 \times 2x^2 \times 3a^3$ پس

$$4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2 = (2x^2 - 3a^3)^2 = (3a^3 - 2x^2)^2$$

## پرسش های شفاهی

۱- بر هر یک از عبارتهای زیر جمله ای بیفزائید تا عبارت حاصل بصورت توان دوم یک دو جمله در آید:

$12x + 36$     $1 + 16c^2$     $a^2 + 1$

$16a^2 - 16ax$     $-16x + 64$     $y^2 - 18y$

$16x^2 - 32ax$     $16x^2 + 4y^2$     $-24ac + 9c^2$

$8x^2 - 12cx$     $9x^2 - 6x$     $25a^2 + 10a$

۲- سه جمله‌ای های زیر را به توان دوم یک دو جمله تجزیه کنید

$9x^2 - 12x + 4$     $x^2 - 4x + 4$

$a^2 - 14a + 49$     $4y^2 - 4y + 1$

$81 - 18t^3 + t^6$     $c^2 + 4 - 4c$

$x^2 + x + \frac{1}{4}$     $c^8 + 2c^4 + 1$

$9a^2 - 2a + \frac{1}{9}$     $4x^2 + x + \frac{1}{16}$

## تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید

$25x^2 - 20xy + 4y^2$     $16t^2 - 8at + a^2$

$4a^2 - 28at + 49t^2$     $9a^2 - 30at + 25t^2$

$144t^2 - 120at + 25a^2$     $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$     $169x^2 + 78ax + 9a^2$

$121x^2 - 110cx + 25c^2$     $4a^2t^8 - 4at^4 + 1$

$y^2 + y + \frac{1}{4}$     $\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

$169a^2 - 156az + 36z^2$     $121x^2z^2 - 220txz + 100t^2$

۲- همچندی‌های زیر را حل کنید:

$$ax - cx = a^2 - 2ac + c^2$$

$$ax - 2tx = a^2 - 4at + 4t^2$$

$$bx - 4x = b^2 - 8b + 16$$

$$ay - c^2 = a^2 - 2ac - cy$$

تبصره - در تجزیه یک عبارت جبری بهتر آنست که نخست سازهٔ مشترک تمام جمله‌ها را اگر موجود باشد تعیین نموده پس از آن بتجزیه پرداخت

مثال ۱- عبارت $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید.

چند جملهٔ $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ بر $a^2$ بخش‌پذیر است بنابراین

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x^2 - 2x + 1)$$

سه جملهٔ درون پرانتز توان دوم $x - 1$ است پس

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x - 1)^2$$

مثال ۲- میخواهیم عبارت $3ct - 3cx + 3at - 3ax$ بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنیم.

عبارت بالا را میتوان بترتیب چنین نوشت

$$3ct - 3cx + 3at - 3ax = 3(ct - cx + at - ax)$$

$$= 3[c(t - x) + a(t - x)]$$

$$= 3(t - x)(c + a)$$

## تمرین

عبارت های زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$t^{5} - 4t^{4} + 4t^{3}$ $\qquad$ $2c^{3} - 20c^{2} + 50c$

$16a^{3} - 40a^{2}t + 25at^{2}$ $\qquad$ $at^{2} - 70at + 1225a$

$32at^{8} - 48at^{6} + 18at^{4}$

$2at + 2ay + 32t + 32y$

$x^{4} + x^{3} + x^{2} + x$ $\qquad$ $2a^{5} - 2a^{4} + 2a^{3} - 2a^{2}$

$30at - 15a + 12c - 24ct$

$6atx + 6btx - 10aty - 10bty$

$\pi h(R - z)^{2} - \pi h(R + z)^{2} + \pi hR^{2}$

۱۴۱ - و - تجزیهٔ عبارتیکه بصورت $a^{2} - b^{2}$ باشد. از اتحاد شمارهٔ (۲) چنین برمیآید:

$$a^{2} - b^{2} = (a + b)(a - b)$$

یعنی: تفاضل توانهای دوم دو عبارت بحاصل ضرب مجموع آن دو در تفاضلشان تجزیه میگردد.

مثال ۱- عبارت $16x^{8} - 81a^{12}$ را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید.

چون این عبارت بصورت $b^2 - a^2$ است خواهیم داشت :

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(4x^4 - 9a^6)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه میشود بنابراین :

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(2x^2 + 3a^3)(2x^2 - 3a^3)$$

مثال ۲ - مطلوبست محاسبهٔ $59^2 - 57^2$

از روی تجزیه حاصل آن با سانی بدست میآید از نیقرار :

$$59^2 - 57^2 = (59 + 57)(59 - 57) = 116 \times 2 = 232$$

## پرسش های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید :

| | | |
|---|---|---|
| $4t^2 - 9$ | $4x^2 - 1$ | $a^2 - 9$ |
| $81t^2 - 121k^6$ | $100x^4 - 81y$ | $25y^2 - 36z^2$ |
| $\frac{4}{9}x^2 - 121$ | $z^2 - \frac{25}{64}$ | $\frac{1}{25} - 0.04x$ |
| $36^2 - 34^2$ | $25^2 - 5^2$ | $12^2 - 15^2$ |

مثال ۱ - مطلوبست تبدیل عبارت $(a+b)^2 - (a-b)^2$

بحاصل ضرب سازه ها .

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)]\,[(a+b) - (a-b)]$$

$$= (a+b+a-b)(a+b-a+b)$$

$$= 2a \cdot 2b = 4ab$$

دیده میشود که این تجزیه همان نتیجهٔ اتحاد شمارهٔ ۱۱۲ است.

مثال ۲ - عبارت $(3x-1)^2-(1-2y)^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنیم میتوان چنین نوشت

$$(3x-1)^2-(1-2y)^2=[(3x-1)+(1-2y)][(3x-1)-(1-2y)]$$

$$=(3x-2y)(3x+2y-2)$$

## تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$16a^2-9(a+b)^2$ ، $25a^4-16b^4$

$64x^2-(8x+2y)^2$ ، $16x^2-9(a-2x)^2$

$(2a-c)^2-(2a+c)^2$ ، $(a-2x)^2-(3x+c)^2$

$12(x-2y)^2-48(2x-y)^2$ و $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$

۲- عبارت های زیر را حساب کنید:

$127^2-27^2$ ، $56^2-51^2$ ، $73^2-43^2$

$215^2-185^2$ ، $154^2-146^2$ ، $114^2-64^2$

۳- بازاء $\pi=\frac{22}{7}$ ، $R=11$ و $r=7$ عبارتهای زیر را حساب کنید:

$\pi R^2-\pi r^2$ ، $\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3$

**مثال ۱-** عبارت $a^2-2ab+b^2-x^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها

سه جملهٔ اول توان دوم $a-b$ است بنابراین میتوان چنین نوشت

$$a^2-2ab+b^2-x^2=(a-b)^2-x^2$$

$$=(a-b+x)(a-b-x)$$

**مثال ۲-** عبارت $t^3-t^2-4t+4$ را بحاصل ضرب

کنید:

میتوان بترتیب چنین نوشت

$$t^3-t^2-4t+4=t^2(t-1)-4(t-1)$$

$$=(t-1)(t^2-4)$$

$$=(t-1)(t+2)(t-2)$$

## تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$y^2-t^2+x^2-2xy$ ، $4x^2-4x+1-m^2$

$1-4at-t^2+4a^2t^2$ ، $6xy-t^2+y^2+9x^2$

$m^2-a^2-2at-t^2$ ، $12at-4a^2-9t^2+m^2$

$x^2-4xt+4t^2-9a^2+6a-1$

$1 + 2bc + 2a - c^2 - b^2 + a^2$

$a^3 - a + a^2x - x$ $\qquad$ $2a^3x + 3a^2x - 8ax - 12x$

$t^4 - 10t^2 + 9$ $\qquad$ $t^3 + 2t^5 + t^7$

$2x^4 - 40x^2 + 200 - 2m^2$

$5a^4 + 20a^3 + 5a^5 - 20a^7$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید (با فرض اینکه $x$ مجهول باشد):

$ax + bx = a^2 - b^2$ $\qquad$ $t^5x - t^3 = tx - t$

$x(t-3)(t^2+9) = t^4 - 81$ $\qquad$ $a^3x = a^2 - 2a + 1 + ax$

۱۲۴- ۵- تجزیه سه‌جمله‌ای درجه دوم $\quad x^2 + px + q$

از اتحاد (۳) چنین برمی‌آید که:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

یعنی: سه‌جمله‌ای $x^2 + px + q$ وقتی تجزیه‌پذیر به سازه‌های درجه اول است که $p$ حاصل جمع دو مقدار و $q$ حاصل ضرب همان دو باشد.

مثال ۱- سه‌جمله‌ای $x^2 + 3x + 2$ را تجزیه کنید.

عدد ۲ را باید تبدیل به حاصل ضرب دو مقدار نمود بطوریکه مجموعشان ۳ باشد چون حاصل جمع و حاصل ضرب هردو مثبت هستند بنابراین دو عدد مطلوب مثبت بوده

ومساوی ۱ و ۲ میباشند پس:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

مثال ۲ـ سه جمله $a^2 - 11a + 24$ را تجزیه کنید.

حاصل ضرب دو عدد مطلوب که ۲۴ باشد مثبت است ومجموعشان یعنی ۱۱- منفی است بنابراین این دو عدد منفی میباشند برای تعیین آنها عدد ۲۴ را باید بدو سازه تجزیه نمود بطوریکه مجموعشان ۱۱ شود وچون ۲۴ تشکیل شده است از حاصل ضرب

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ۱ × ۲۴ | که دراینجا مجموعشان | ۲۵ است |
| یا | ۲ × ۱۲ | « | ۱۴ است |
| یا | ۳ × ۸ | « | ۱۱ است |
| یا | ۴ × ۶ | « | ۱۰ است |

بنابراین می‌بینیم که دو عدد مطلوب ۳- و ۸- میباشد

پس $a^2 - 11a + 24 = (a-8)(a-3)$

مثال ۳ـ مطلوبست تجزیه سه جمله $c^2 - c - 42$ بدو سازه درجه اول

چون حاصل ضرب دو عدد مطلوب (یعنی ۴۲-) منفی است پس نشانه آنها مختلف میباشد وچون حاصل جمعشان (یعنی ۱-) منفی است پس آنکه قدر مطلقش بزرگتر است منفی میباشد بنابراین باید ۴۲ را بدو سازه تجزیه کنیم بقسمی که تفاضلشان ۱ باشد وبعد سازه بزرگترا منفی بگیریم:

۴۲ تشکیل شده است از:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ۴۲ × ۱ | که در اینجا تفاضلشان | ۴۱ است |
| یا | ۲۱ × ۲ | « | ۱۹ است |
| یا | ۱۴ × ۳ | « | ۱۱ است |
| یا | ۷ × ۶ | « | ۱ است |

پس دو عدد مطلوب ۷- و ۶ میباشند و از آنجا خواهیم داشت:

$$c^2 - c - 42 = (c-7)(c+6)$$

## تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$a^2 - 9a + 14$      $x^2 + 4x + 3$

$x^2 - 8x + 7$      $t^2 + 3t - 10$

$y^2 - 4y - 45$      $t^2 - t - 6$

$-2y - y^2 + 63$      $-x^2 - x + 12$

$a^2b^2 + 10abx^3 - 24x^6$

$(a+x)^2 + 3(a+x) + 2$      $33a^2 - b^2x^2 - 8abx$

در این عبارت مجموع $(a+x)$ را در نظر بگیرید

۲- تمرین های ترکیبی - عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$56t + t^2 - t^3$ $\qquad$ $x^3 - 4x$

$ab^4 - 7ab^2 - 18a$ $\qquad$ $3y^2 - 9y - 3$

$4a^5 - 124a^3 - 200a$ $\qquad$ $81a - 18a^3 + a^5$

$6at^2 + 3t^2c + 18atx + 9ctx$

$4a^3 - 4ay^2 - 8ayz - 4az^2$

۳- همچندیهای زیر را بنابر آنکه $x$ و $y$ و $z$ مجهول باشند حل کنید.

$4x + ax = a^2 - 16$ $\qquad$ $(a-3)x = a^2 - 5a + 6$

$Ky + 42 = K^2 - K - 6y$

$ay + a = a^2 + 5y - 2$

$ax + 3ac = a^2 + 3cz + 2c^2$

۴- با در نظر گرفتن تساویهایی مانند تساوی

$$(\sqrt{5} \pm \sqrt{3})^2 = 8 \pm 2\sqrt{15}$$

و دانستن آن $8 = 5 + 3$ و $15 = 5 \times 3$ عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید

$7 + 2\sqrt{10}$ $\qquad$ $5 + 2\sqrt{6}$ $\qquad$ $5 - 2\sqrt{6}$

$4 + 2\sqrt{3}$ $\qquad$ $8 - 2\sqrt{7}$ $\qquad$ $6 + 2\sqrt{8}$

$6 - 4\sqrt{2}$ $\qquad$ $16 - 2\sqrt{55}$ $\qquad$ $21 - 12\sqrt{3}$

## ۱۲۳- حل بعضی از همچندیها از روی تجزیه.

مثال ۱- مطلوبست حل همچندی . $(x-3)(x+2)=0$ برای حل این همچندی باید درنظر داشت که

شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب چند سازه مساوی صفر باشد آنستکه دست کم یکی از سازه ها صفر باشد (شماره ۴۲)

ازینجا چنین برمیآید که یا باید $x-3=0$ باشد و یا $x+2=0$ یعنی یا $x=3$ و یا $x=-2$ دو عدد ۳ و ۲- ریشه های همچندی مفروضند .

مثال ۲- مطلوبست حل همچندی

$$(x-1)(2x-3)=(x-1)(2x+5)$$

اگر دو طرف همچندی را بر $x-1$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$2x-3=2x+5$$

و یا $-3=5$ یعنی ریشه ای برای همچندی مفروض بدست نمی آید درصورتیکه می بینیم اگر $x$ را مساوی یک بگیریم دو طرف همچندی باهم یکی میشوند یعنی ۱ ریشهٔ همچندی است برای بدست آوردن این ریشه طرف دوم را بطرف اول برده و عبارت حاصل را تجزیه می کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(x-1)[2x-3-(2x-5)]=0$$

و یا $(x-1)(-8)=0$ با با حاصل بالا چون سازهٔ ۸- مخالف صفر است پس باید $x-1=0$ باشد و از آنجا ریشهٔ همچندی بالا $x=1$ میباشد .

۱۲۴- تبصرهٔ مهم- نباید دو طرف همچندی را بر عبارتی شامل مجهول تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشهٔ همچندی از بین برود مگر آنکه آن عبارت شامل هیچ ریشه نباشد یعنی بازا هیچ مقدار مجهول صفر نشود

بنابراین چون در دو طرف همچندی سازهٔ مشترکی که شامل مجهول باشد ببینیم نباید آنرا بدون دقت از بین برد بلکه باید همهٔ جمله ها را بیک طرف برده آنرا تجزیه نمود و ریشه های همچندی را بدست آورد.

مثال- مطلوبست حل همچندی $x^3 + x^2 = 4x + 4$

پس از تجزیهٔ دو طرف بحاصل ضرب سازه ها چنین میشود

$$x^2(x+1) = 4(x+1)$$

می بینیم دو طرف دارای سازهٔ مشترک $x+1$ است اگر همهٔ جمله ها را بیک طرف ببریم خواهیم داشت:

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

و یا پس از تجزیه $(x+1)(x^2-4) = 0$

و یا $(x+1)(x+2)(x-2) = 0$

پس ریشه های همچندی بالا عبارتند از ریشه های همچندی های

$$x+1=0 \quad , \quad x+2=0 \quad , \quad x-2=0$$

یعنی $x=-1$ و $x=-2$ و $x=4$

درصورتیکه اگر دو طرف را بر سازهٔ مشترک $x+1$ تقسیم میکردیم ریشهٔ $x=-1$ از بین میرفت.

## تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

$x^2=4$ $\quad$ $x^2=49$ $\quad$ $x^2=5x$

$5x^2-25x=0$

$(x-3)^2+x-9=0$

$(x-1)^2+(2x+5)(x-1)=0$

$(3x-2)^2-(2x-2)(x-2)=0$

$x^2-4=3x+6$

$x^2-ax=5x-5a$

$(x-a)^2-(2x-1)(x-a)=0$

$(4x+2)(x-2m)-(x-2m)^2=0$

$x^2-a^2-cx+ac=0$

$y^3-9y=45-5y^2$

$x^3-ax^2=4k^2x-4ak^2$

# فصل ششم

## برخه

۱۲۵- تعریف - چنانکه میدانیم بخش مقدار جبری $a$ بر مقدار جبری $b$ را بصورت برخهٔ $\frac{a}{b}$ نویسند چنین برخه‌ایکه برخه شمار و برخه نامش عبارت جبری باشد برخهٔ جبری نامیده میشود

مثال :
$$\frac{-2}{3} \quad و \quad \frac{2-x}{a-1} \quad و \quad -\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{b}-x}$$

نشانهٔ برخه (که جلوی خط برخه گذارده میشود) موافق قاعدهٔ تقسیم مثبت است اگر برخه نام و برخه شمارش دارای یک نشانه باشند والا منفی است

$$\frac{-3}{5}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5} \qquad \frac{-5}{-7}=\frac{+5}{+7}=+\frac{5}{7}$$

بعکس میتوان نشانهٔ جلوی برخه را تغییر داد بشرط اینکه نشانهٔ برخه نام یا برخه شمار تغییر نماید

مانند

$$-\frac{x-2}{x+1}=\frac{-(x-2)}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}$$

$$-\frac{x^2+a}{ax-1}=\frac{x^2+a}{-(ax-1)}=\frac{x^2+a}{1-ax}$$

$$\frac{2x-a}{2a-x}=-\frac{a-2x}{2a-x}=-\frac{2x-a}{x-2a}$$

### پرسش های ساده

نشانهٔ جلوی هر برخه را تغییر دهید طوریکه مقدار برخه تغییر نکند

$$\frac{-a}{x} \qquad -\frac{x}{y} \qquad \frac{-2x}{a-b}$$

$$\frac{a}{-x} \qquad -\frac{3}{a-x} \qquad \frac{4a}{2-3x}$$

$$-\frac{a-b}{3x-2} \qquad \frac{3x-1}{2-5x} \qquad -\frac{a-x}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{2b-a}{2x-y+1} \qquad \frac{a-3}{x^2-(a^2-1)} \qquad -\frac{x^2-(1-ax)}{x^2(a-b)^2}$$

۱۲۶- بنا بتعریف تقسیم اگر بهره برخه مساوی $q$ باشد یعنی $q=\frac{a}{b}$ خواهیم داشت

$$a=bq$$

۱۲۷- در عمل‌های راجع ببرخه‌ها همواره ازین اصل استفاده میکنیم:

هرگاه برخه‌شمار و برخه‌نام را در عبارتی مخالف صفر ضرب و یا بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کنیم در مقدار برخه تغییری رخ نمیدهد. (از خاصیت‌های تقسیم شماره ۴۰)

مثلاً میتوان نشانهٔ برخه‌نام و برخه‌شمار هر دو را تغییر داد و بدون آنکه تغییری در مقدار برخه پیدا شود زیرا مثل اینست که برخه‌نام و برخه‌شمار در عدد ۱- ضرب و یا برآن تقسیم شده باشد

مثلاً $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$ و $\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

و $\frac{a-x}{b-x} = \frac{x-a}{x-b}$

## الف ـ ساده کردن برخه

۱۲۸- تبدیل برخه بساده‌ترین صورت ـ ساده‌ترین صورت یک برخه

برخه ایست که برخه‌شمار و برخه‌نامش نسبت بهم اول باشند یعنی این دو عبارت دارای سازهٔ مشترک نباشند

مانند $\frac{-3}{4}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{x-3}{x+4}$ و $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

وهرگاه برخه‌شمار و برخه‌نام نسبت بهم اول نباشند یعنی بر عبارتی بخش‌پذیر باشند میتوان بوسیلهٔ تقسیم کردن آنها بر آن عبارت برخه را ساده نمود.

مثلاً در برخهٔ $\frac{12a^2b}{-3ab^2}$ برخه‌شمار و برخه‌نامش دارای سازهٔ مشترک $3ab$ میباشند که چون آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم کنیم حاصل میشود $\frac{4a}{-b}$ این برخه سادهٔ‌ترین صورت برخهٔ بالا است و همچنین در برخهٔ $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ برخه‌شمار و برخه‌نامش نسبت اول نیستند زیرا از تجزیهٔ هریک معلوم میشود که دارای سازهٔ مشترک $a+b$ میباشند بدینطریق:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a}$$

از اینجا قاعدهٔ زیر را برای تبدیل برخه بسادهٔ‌ترین صورت خود خواهیم داشت:

۱۲۹ - قاعده - برای تبدیل یک برخه بسادهٔ‌ترین صورت خود برخه‌شمار و برخه‌نام را بحاصل ضرب سازه‌های اول تجزیه نموده و سازه‌های مشترک آنها را حذف میکنیم (یعنی آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم مینمائیم)

چنانکه برای تبدیل برخهٔ $\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}$ بسادهٔ‌ترین صورت خود اندر دوی قاعده بالا عمل میکنیم از اینقرار:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{n(a+b-c)}=\frac{a-b+c}{n}$$

۱۳۰- یادآوری- اوّلاً چنانکه گفتیم اگر برخه شمار و برخه نام را در عبارتی ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمی کند ولی اگر بر برخه شمار و برخه نام یک عبارت مخالف صفر بیفزائیم و یا از آن ها یک عبارت مخالف صفر کم کنیم مقدار برخه تغییر میکند .

چنانکه هرگاه از برخه شمار و برخه نام $\frac{5}{4}$ یک یکه کم کنیم حاصل مساوی $\frac{4}{3}$ و یا ۲ میشود که مخالف $\frac{5}{4}$ است و نیز اگر بر آنها یک یکه بیفزائیم حاصل مساوی $\frac{6}{4}$ و یا $\frac{3}{2}$ میشود که آن نیز مخالف $\frac{5}{4}$ است

همچنین برخه $\frac{1-x}{x+1}$ ساده ترین صورت را داراست زیرا برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اوّلند ولی اگر از برخه شمار و برخه نام $x$ را کم کنیم مقدار برخه مساوی $\frac{1}{1}$ یا مساوی ۱- میشود که با برخه $\frac{1-x}{x+1}$ مساوی نیست زیرا این برخه بازاء مقدارهای $x$ مقدارهای مخالف ۱- پیدا میکند .

ثانیاً باید دانست که اگر برخه شمار و برخه نام را در دو عبارت مختلف ضرب کنیم مقدار برخه تغییر میکند بخصوص اگر آنها را بتوان دوم رسانیم مقدار برخه تغییر میکند ( مگر وقتی که برخه مساوی ۱+ باشد )

## پرسش های ساده

۱- برخه های زیر را ساده کنید .

$$\frac{36a^3}{81ax} \qquad \frac{-60m^2}{-90m^3} \qquad \frac{10x^2}{25x^3}$$

$$\frac{3ax^2}{-36ax^2} \qquad \frac{24ax^2}{60ax} \qquad \frac{-144x^2}{120x}$$

$$\frac{-14m^3n^2}{60m^3n^2} \qquad \frac{63a^3b^2c^2}{84abc^4} \qquad \frac{a^2\sqrt{6}}{x\sqrt{2}}.$$

## تمرین

هریک از برخهای زیر را به ساده‌ترین صورت خود تبدیل کنید:

$$\frac{a^3-ab}{a^2-ab} \qquad \frac{ax-a}{b-bx} \qquad \frac{5x-5}{7-7x}$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2} \qquad \frac{x^3-4x}{(x+2)^2} \qquad \frac{6a^2-6ab}{3(b-a)^2}$$

$$\frac{x^2-x}{1-x} \qquad \frac{mx-m-x+1}{(m-1)^2}$$

$$\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy} \qquad \frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$$

$$\frac{2ac-2ad-3bc+3bd}{2ac-2ad+3bc-3bd} \qquad \frac{3x^2-3x-270}{3x^2-243}$$

$$\frac{(x-3)^2-a^2}{2x-6+2a} \qquad \frac{x^2-5x+6}{2x^2-12x+18}$$

$$\frac{6ab^2-3ab-3ab^3}{ab^2-ab} \qquad \frac{x^4-a^4}{x^4+2a^2x^2+a^4}$$

## ب - جمع جبری برخه‌ها

۱۳۱- جمع جبری برخه‌هائیکه دارای یک برخه نامند. - میخواهیم دو برخهٔ $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b}$ که دارای یک برخه نامند باهم جمع کنیم اگر مقدار این دو برخه بترتیب $q$ و $q'$ باشد خواهیم داشت

$$a=bq \qquad \text{و} \qquad a'=bq'$$

و میخواهیم حاصل جمع $q+q'$ را بدست بیاوریم برای این کار چون دو تساوی بالا باهم جمع کنیم این تساوی بدست میاید.

$$a + a' = bq + bq'$$

و یا

$$a + a' = b(q + q')$$

حال برای تعیین $q + q'$ کافیست دو طرف این تساوی را بر $b$ تقسیم کنیم

$$q + q' = \frac{a + a'}{b}$$

یعنی $q + q'$ یا حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b}$ برخه ایست مساوی $\frac{a + a'}{b}$

که برخه شمارش مجموع برخه شمارها و برخه نامش مساوی برخه نام دو برخه مفروض باشد

بنابراین قاعده زیر را خواهیم داشت:

قاعده - مجموع جبری چند برخه که دارای یک برخه نامند برخه ایست که برخه نامش همان برخه نام و برخه شمارش مجموع جبری برخه شمارهای آنها باشد

مانند

$$\frac{a}{x} - \frac{2a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a - 2a + b}{x} = \frac{-a + b}{x}$$

و

$$\frac{a - b}{12} - \frac{b - a}{12} - \frac{2a - 3b}{12} = \frac{a - b - (b - a) - (2a - 3b)}{12} = \frac{b}{12}$$

## پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \qquad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{7} - \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} \qquad \frac{1}{n} + \frac{3}{n} \qquad \frac{y}{x} - \frac{2y}{x}$$

$$\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{x} \qquad \frac{a - 3}{x} - \frac{a}{x} \qquad \frac{a + c}{ax} - \frac{-c}{ax}$$

$\frac{a^2+x^2}{a+x} + \frac{x^2-a^2}{a+x}$ $\qquad$ $\frac{a-x}{3x} - \frac{a+x}{3x}$

$\frac{x^3-x^2}{x+1} + \frac{2x^2}{x+1}$ $\qquad$ $\frac{a^2-ax}{a+x} + \frac{2ax}{a+x}$

تبصره - بعکس میتوان برخه ای را که برخه نمایش چند جمله باشد بمجموع جبری چند برخه تبدیل نمود

مثال: $\frac{8a-x}{12} = \frac{8a}{12} - \frac{x}{12} = \frac{2a}{3} - \frac{x}{12}$

و $\frac{ax+a^2}{ax} = \frac{ax}{ax} + \frac{a^2}{ax} = 1 + \frac{a}{x}$

۱۳۲- جمع جبری چند برخه که برخه نامشان یکی نباشد - برای جمع چند برخه که برخه نامشان مساوی نباشد باید برخه نامهای آنها را مساوی نمود (بدون اینکه تغییری در مقدار برخه ها حاصل شود) و مانند قاعده بالا عمل کرد.

مثال - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با هم جمع کنیم

اگر $a$ و $b$ هر دو را در $d$ (برخه نام $\frac{c}{d}$) و همچنین $c$ و $d$ هر دو را در $b$ (برخه نام $\frac{a}{b}$) ضرب کنیم برخه نام آنها مساوی میشود بدون اینکه تغییری در مقدار این دو برخه حاصل شود از قرار زیر:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{ad}{bd}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{bc}{bd}$$

پس مجموع دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ چنین میشود:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

۱۲۳- قاعدهٔ کلی برای مساوی کردن برخه نامها. قاعدهٔ کلی این است که برخه شمار و برخه نام هر برخه را در حاصل ضرب برخه نامهای دیگر ضرب کنیم در این صورت برخه نام مشترک حاصل ضرب برخه نامها میشود چنانکه اگر بخواهیم برخه های $\frac{x}{-5}$ و $\frac{-a}{2}$ و $\frac{3}{y}$ را تبدیل برخه هائی کنیم که دارای یک برخه نام باشند موافق قاعدهٔ بالا بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{-5} = \frac{x \times 2y}{-5 \times 2y} = \frac{2xy}{-10y}$$

$$\frac{-a}{2} = \frac{-a \times (-5y)}{2 \times (-5y)} = \frac{5ay}{-10y}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{3 \times (-10)}{y \times (-10)} = \frac{-30}{-10y}$$

این قاعده کلی است ولی در حالتهای مخصوصی که برخه نامها دارای سازه یا سازه های مشترک باشند بهتر آنستکه کوچکترین مضرب برخه نامها را بجای حاصل ضرب آنها برخه نام مشترک آنها گرفت چنانکه برای برخه نام مشترک برخه های $\frac{-5}{4x}$ و $\frac{y}{9x^2}$ و $\frac{5}{6x}$ بجای آنکه حاصل ضرب برخه نامها را برخه نام مشترک قرار دهیم بهتر آنستکه کوچکترین مضرب مشترک چون $4x$ و $9x^2$ و $6x$ را که $36x^2$ است برخه نام مشترک بگیریم

و می‌بینیم که $36x^2$ مساوی حاصل ضرب $4x$ است در $9x$

۴ ، $9x^2$

$\frac{۵}{6x}$ ، $6x$

بنابراین برای تعیین برخه‌شمارهای هر برخه باید برخه‌شمار اول را در $9x$ و دومی را در
۴ و سومی را در $6x$ ضرب کنیم از اینقرار:

$$-\frac{5}{4x}=-\frac{5\times 9x}{4x\times 9x}=-\frac{45x}{36x^2}$$

$$\frac{7}{9x^2}=\frac{7\times 4}{9x^2\times 4}=\frac{28}{36x^2}$$

$$\frac{a}{6x}=\frac{a\times 6x}{6x\times 6x}=\frac{6ax}{36x^2}$$

۱۳۴ـ کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری ـ کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری ساده‌ترین عبارتیست که بر آنها بخش‌پذیر باشد و برای تعیین آن باید هر یک از عبارتهای مفروض را بحاصل ضرب سازه‌های اول تجزیه نمود ـ کوچکترین مضرب مشترک بین عبارتهای مفروض مساویست با حاصل ضرب تمام سازه‌های اول با نماهای بزرگتر.

مثال ۱ـ کوچکترین مضرب مشترک بین $mx$ و $x^2$ مساوی $mx^2$ است
و همچنین " " " " $4nx$ و $6ax^2$ مساوی $12anx^2$ است

مثال ۲ـ میخواهیم بین $ax^2-9a$ و $x^2-5x+6$ و $x^2-4x+4$
کوچکترین مضرب مشترک بگیریم
بترتیب خواهیم داشت:

$$ax^2-9a=a(x+3)(x-3)$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

بنابراین کوچکترین مضرب چین این سه عبارت این است

$$a(x-3)(x+3)(x-2)^2$$

## تمرین

مطلوبست تعیین کوچکترین مضرب مشترک چین عبارتهای زیر:

$a$ و $b$ و $a+b$

همچنین $x$ و $ax$ و $a+x$

$x+3$ و $2x+6$

$ax+a^2$ و $x+a$

$x^2-n^2$ و $n+x$

$x^2-4$ و $6+3x$ و $x-2$

$x-3$ و $x^2-9$ و $x^2-5x+6$

$x^2-25$ و $x^2-6x+5$ و $x+5$

$4a^2-1$ و $2a+1$ و $a$

مثال ۱ـ حاصل عبارت $x-3+\frac{5x}{2x-6}$ را بدست آورید

این عبارت را میتوان چنین نوشت:

$$\frac{x-3}{1}+\frac{5x}{2(x-3)}$$

کوچکترین مضرب برخه نماها $2(x-3)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین است

$$\frac{2(x-3)^2+5x}{2(x-3)} = \frac{2x^2-7x+18}{2(x-3)}$$

مثال ۲- حاصل عبارت $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{4x}{1-x^2}$ را بدست آورید

برخه نماها را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه میکنیم:

$$\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4x}{(1-x)(1+x)}$$

کوچکترین مضرب مشترک برخه نماها $2(x-1)(x+1)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین میشود

$$\frac{(x+1)^2-(x-1)^2-8x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

## تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{x^2+n^2}{4x-2n} + 2x + n$$

$$x^2+x+1 - \frac{x^2+2}{x-1}$$

$$\frac{3a}{2+b} - \frac{a}{b-2} + \frac{1}{b^2-4}$$

$$x+y^2 - \frac{x^3+y^3}{x+y} - xy$$

$$x^2+x - \frac{x^4+3x^2+1}{x^2-x+1} + 1$$

$$\frac{2-x}{1-2x} - \frac{2+x}{1+2x} - \frac{1-6x}{4x^2-1}$$

$$2a+3 - \frac{4}{a-2} - \left(a+1 - \frac{3}{a+4}\right)$$

$$y-3-\frac{3y}{y+3}-\left(y+3+\frac{3y}{y+4}\right)$$

$$ax+a-\frac{a}{x+1}-\left(ax-a-\frac{x}{x-1}\right)$$

در مثال بالا بهتر این است که اول پرانتز را از میان برده جمله های متشابه را جمع کنیم پس از آن بجمع جبری برخه ها بپردازیم.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

کوچکترین برخه نام مشترک را میتوان مساوی $(a-b)(b-c)(c-a)$ گرفت.

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\frac{x+z}{(y-z)(y-x)}+\frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}-\frac{ac}{(b-c)(a-b)}-\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$$

## ج- ضرب برخه ها

۱۳۵- میخواهیم حاصل ضرب برخهٔ $\frac{a}{b}$ را در برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم.

اگر $\frac{a}{b}$ را $q$ و $\frac{a'}{b'}$ را $q'$ بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{a'}{b'}=q' \quad \text{و} \quad \frac{a}{b}=q$$

ما میخواهیم حاصل ضرب $qq'$ را بدست آوریم. از دو تساوی بالا چنین برمیآید:

$$a=bq$$

$$a'=b'q'$$

اگر دو طرف این دو تساوی را در یکدیگر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$هه' = بب'قق'$$

برای بدست آوردن قق' دو طرف این تساوی را بر بب' تقسیم میکنیم:

$$قق' = \frac{هه'}{بب'}$$

یعنی قق' که حاصل ضرب دو برخه $\frac{ه}{ب}$ و $\frac{ه'}{ب'}$ میباشد برخه ایست که برخه شمارش حاصل ضرب برخه شمارها (ه و ه') و برخه نامش حاصل ضرب برخه نامها: ب و ب' باشد.

مثال
$$\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8} = \frac{2x(x-y)(x+y)}{8(x-y)} = \frac{x(x+y)}{4}$$
$$\frac{x^2+a^2}{x} \times \frac{x^3}{x^4-a^4} = \frac{x^3(x^2+a^2)}{x(x^4-a^4)} = \frac{x^2}{x^2-a^2}$$

۱۳۶- تبصره - چون هر عبارت درست را میتوان بشکل برخه ای نوشت که برخه شمارش همان عبارت و برخه نامش یک باشد بنابراین برای ضرب یک عبارت درست در یک برخه آن عبارت را در برخه شمار آن برخه ضرب میکنیم.

مثال:
$$-2 \times \frac{a}{x} = \frac{-2}{1} \times \frac{a}{x} = \frac{-2a}{x}$$
$$(x-1) \times \frac{2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

نتیجه ۱- هرگاه برخه شمار یک برخه در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه در آن عبارت ضرب میشود.

نتیجه ۲- از آنچه گفتیم معلوم میشود که حاصل ضرب $x$ در $\frac{a}{x}$ را میتوان $\frac{ax}{x}$ نوشت حال اگر برخه نام و برخه شمار $\frac{ax}{x}$ را بر $x$ تقسیم کنیم (بفرض $x \neq 0$)

خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{a}{\frac{b}{x}}$$

یعنی برای ضرب $\frac{a}{b}$ در $x$ میتوان برخه نامش را بر $x$ تقسیم نمود.

مثال:

$$\frac{a+x}{8x^2} \times 2x = \frac{a+x}{\frac{8x^2}{2x}} = \frac{a+x}{4x}$$

$$\frac{8}{y^2-x^2} \times (x+y) = \frac{8}{\frac{y^2-x^2}{x+y}} = \frac{8}{y-x}$$

۱۳۷ - توان یک برخه - چون توان حالت مخصوصی است از ضرب پیاپی توان $m$ ام یک برخه برخه ایست که برخه شمارش توان $m$ ام برخه شمار آن برخه بوده برخه نامش توان $m$ ام برخه نام آن باشد یعنی :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\frac{a-1}{2x}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{-1}{x-1}\right)^3 = \frac{-1}{(x-1)^3}$$

## پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$-3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^2$ $\qquad$ $\frac{5}{6} \times \frac{18}{25}$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\frac{a^2}{n^2} \times \left(\frac{-2n}{a}\right)$ $\qquad$ $\frac{a}{2x} \times \frac{x}{a}$ $\qquad$ $\frac{1}{a} \times \frac{1}{x}$

$\frac{a^2-x^2}{a} \times \frac{a}{a+x}$ $\qquad$ $\frac{a^3}{n^2} \times \left(\frac{x}{a}\right)^2$ $\qquad$ $-2a \times \left(\frac{-x}{a}\right)$

$\frac{3x+n}{nx} \times \frac{n^2x^2}{3x-n}$ $\qquad$ $\frac{a^2-4}{3x} \times \frac{6x}{a-2}$

$\left(\frac{n}{a+n}\right)^2 (a+n)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 \times a^2$

$$\frac{y-x}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{x-y} \qquad \frac{n^2-9}{3x^2} \times \frac{x}{n-3}$$

## تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{5ax}{2n^2} \times \frac{6nx}{10a^2} \times \frac{n^2a}{x^3} \qquad \left(\frac{2ax}{[illegible]}\right)^2 \times \frac{10n}{4a^3x}$$

$$\frac{x}{4n^2} \cdot \left(\frac{n}{2x}\right)^2 \cdot 3\frac{1}{2} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{d^2x}{n^2} \times \frac{b^3n^2}{ax}$$

$$\left(\frac{2y}{3bx}\right)^2 \times \frac{12b^3}{16c^2yx^2} \times 8c^5x^3$$

$$\frac{x^4}{(2x)^3} \times \left(\frac{3a}{x}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{2x}{n}\right)^3 \left(\frac{2n}{x}\right)^2$$

$$\frac{n+2}{n-2} \times \frac{n^2-4n+4}{n^2-4} \qquad \frac{6n}{x} \cdot \left(\frac{-2x}{3n}\right)^3 \left(\frac{9n^2}{4x}\right)^2$$

$$\frac{n^2-4}{n+3} \times \frac{2n+6}{3n-6} \qquad \frac{a+x}{a-x} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$$

$$\frac{3x-12}{ax+3a} \times \frac{a^2x+3a^2}{nx-4n} \qquad \frac{x+7}{x^2-25} \times \frac{2x-15}{ax+7a}$$

$$\frac{2n^2+6}{5x^2} \times \frac{10x^3}{3n^2+9} \qquad \frac{5a+5c}{an-cn} \times \frac{an^2-cn^2}{a^2+ac}$$

$$\frac{x^2-16}{2x^2-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2+x-20} \qquad \frac{x^2-x-6}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x-3}$$

## ۱۳۸ - حل معادله‌های کسری - مثال - مطلوبست حل معادله

$$(1) \qquad \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x+2}{2(x-1)} = \frac{x^2-30x+2}{6x^2-6}$$

در خط طرف دوم را بطرف اول میآوریم و مجموع طرف اول را حساب میکنیم کوچکترین مخرج مشترک $6(x^2-1)$ است پس خواهیم داشت:

$$(2) \qquad \frac{2(x-1)(5x-1)-3(x+1)(3x+2)-(x^2-30x+2)}{6(x^2-1)}$$

یعنی بهر برخه شمار بر برخه نام ( $1-x^2$ ) ۶ مساوی صفر است بنا بر این لازم است (شماره ۵۳) که برخه شمار مساوی صفر باشد یعنی :

$$۲(x-۱)(۵x-۱)-۳(x+۱)(۳x+۲)-(x^۲-۲۰x+۲)=۰$$

و با پس از ساده کردن $x=۲$

تبصره - چنانکه دیده میشود پس از اینکه همچندی (۱) بصورت همچندی (۲) درآمد برای حل آن کافی است تنها برخه شمارش را مساوی صفر قرار دهیم و چون این برخه شمار از ضرب کردن دو طرف همچندی (۱) در برخه نام مشترک بدست آمده پس کافی است برای آسانی از اول (پس از ساده کردن برخه ها) دو طرف همچندی (۱) را در کوچکترین برخه نام مشترک ضرب کنیم بدون اینکه آن برخه نام مشترک را بنویسیم.

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{۲x-۱}{۲(x-۳)}=\frac{۳(x-۲)}{۳x-۱}$$

دو طرف را در $۲(x-۳)(۳x-۱)$ که کوچکترین برخه نام مشترکست ضرب میکنیم خواهیم داشت :

$$(۲x-۱)(۳x-۱)=۳(x-۲)\cdot۲(x-۳)$$

که پس از ساده کردن جواب همچندی $x=\frac{۷}{۵}$ است

تمرین

دیاآنکه برخه نام بی اندازه بزرگتر از برخه شمار گردد که ما درین جا بدان نمیپردازیم

این معادله‌ها را حل کنید:

$$\frac{2x^2-1}{2x-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{2(3x-21)}{3(2x-4)}=\frac{14}{9}$$

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{4-x}{5-x}$$

$$\frac{4-2x}{3}-\frac{4}{6x-3}=\frac{1.5x}{x-0.5}-\frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$\frac{3x-1}{2x-6}+\frac{5x-7}{3x-9}+\frac{7x+1}{4x-12}=11$$

$$\frac{3x-5}{5x-5}+\frac{5x-1}{7x-7}+\frac{x-4}{x-1}=2$$

$$\frac{4x^2-x}{1+x}-\frac{3x}{1-x}=\frac{4x^3+2x}{x^2-1}$$

مثال ـ مطلوبست حل معادلهٔ

$$\frac{8}{x-3}-\frac{4}{x-5}=\frac{5}{x-2}-\frac{1}{x-6}$$

دو طرف را در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ضرب میکنیم حاصل میشود:

$$8(x-5)(x-2)(x-6)-4(x-3)(x-2)(x-6)=$$

$$5(x-3)(x-5)(x-6)-(x-3)(x-5)(x-2)$$

در طرف اول $4(x-2)(x-6)$ و در طرف دوم $(x-3)(x-5)$ سا

مشترک است بنا براین خواهیم داشت

$$4(x-2)(x-6)\left[2(x-5)-(x-3)\right]=$$

$$(x-3)(x-5)\left[5(x-6)-(x-2)\right]$$

و پس از ساده کردن

$$4(x-2)(x-6)(x-7)=4(x-3)(x-5)(x-7)$$

طرف دوم را بطرف اول میبریم و چون بین آنها $4(x-7)$ سازهٔ مشترک است پس خواهیم داشت:

$$4(x-7)\left[(x-2)(x-6)-(x-3)(x-5)\right]=0$$

و یا

$$(x-7)(x^2-8x+12-x^2+8x-15)=0$$

و یا $-3(x-7)=0$ و از آنجا $x=7$

## تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\frac{9}{x-7}-\frac{5}{x-8}=\frac{9}{x-2}-\frac{5}{x+1}$$

$$\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}$$

$$\frac{5}{x-6}+\frac{4}{x-9}=\frac{8}{x-7}+\frac{1}{x-10}$$

$$\frac{7}{x-6}+\frac{3}{x-11}=\frac{9}{x-7}+\frac{1}{x-12}$$

$$\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{z+8}{z+9}+\frac{z+4}{z+5}=\frac{z+9}{z+10}+\frac{z+3}{z+4}$$

$$\frac{a-2}{a-3}+\frac{a-3}{a-4}=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a-4}{a-5}$$

$$\frac{y}{y-3}+\frac{9-y}{7-y}=\frac{y+1}{y-2}+\frac{8-y}{6-y}$$

$$\frac{3a-27}{a-14}+\frac{a-7}{a-8}=\frac{a-12}{a-13}+\frac{2a-17}{a-9}$$

## و — تقسیم برخه‌ها

۱۳۹- میخواهیم بهر برخهٔ $\frac{a}{b}$ را بر برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم. اگر مانند پیش این دو برخه را بترتیب $q$ و $q'$ بنامیم میخواهیم $\frac{q}{q'}$ را بدست بیاوریم

اگر دو طرف دو تساوی $a = bq$ و $a' = b'q'$ را بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}$$

برای بدست آوردن $\frac{q}{q'}$ دو طرف تساوی بالا را در برخهٔ $\frac{b'}{b}$ ضرب کنیم بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{q}{q'} = \frac{ab'}{a'b} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}$$

یعنی: بهر دو برخه مساویست با حاصل ضرب برخهٔ بخشی در وارونهٔ برخهٔ بخشیاب.

مثال:

$$\frac{2}{3x} : \frac{8}{x^2} = \frac{2}{3x} \times \frac{x^2}{8} = \frac{x}{12}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

یا

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b} : \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

تبصره- از مثال آخر چنین برمیآید که هرگاه برخه نام در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه بر آن عبارت تقسیم میشود و بعکس. حال اگر در همین مثال برخه شمار و برخه نام $\frac{a}{bx}$ را بر $x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx} = \frac{\frac{a}{x}}{b}$$

یعنی: برای تقسیم کردن یک برخه بر یک عبارت میتوان برخه شمار آن برخه را بر آن عبارت تقسیم نمود.

مانند

$$\frac{x^2-1}{a} : (x+1) = \frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{a} = \frac{x-1}{a}$$

## تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$\frac{-5}{51} : \frac{10}{-17}$ ؛ $\frac{23}{39} : \frac{-115}{26}$ ؛ $-4\frac{1}{5} : 3\frac{2}{4}$

$\frac{3ab}{x} : \frac{ac}{4nx}$ ؛ $\frac{a^2}{n} : \frac{2a}{n^3}$ ؛ $\left(\frac{2an}{x}\right)^2 : \frac{6an^2}{9x^3}$

$\frac{a}{b} : \frac{x}{n} : \frac{an^2}{bx^2}$

(درین مثال و مانند آن قرار میگذاریم که ابتدا خارج قسمت دو برخهٔ اول را بدست آورده پس از آن حاصل را بر برخهٔ سوم تقسیم کنیم)

$$\frac{3an}{4bx} : \frac{6a^2n}{5b^2x} : \frac{10an^2}{8cx}$$

$$\frac{15}{4n^2} : \frac{5a}{2n^6} : \frac{(3n^2)^2}{12a^2}$$

$$\frac{12y^3}{10x^2} : \frac{6y}{5x} : \frac{4ax}{3by^2}$$

$$\frac{(4n^2)^2}{12} : \left(-\frac{2}{n}\right)^3 : \frac{(2n)^2}{-6}$$

$$\frac{10ab^2}{-21a^3} : \frac{5b}{3a^2} : -14a^4b$$

$$-\left(-\frac{3a}{2x}\right)^2 : -\left(-\frac{3a}{4x^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a}{x}\right)$$

$$\frac{24x^2y}{-12} \cdot \left(-\frac{y}{4x}\right)^3 : -\frac{(3xy)^2}{2a^2}$$

$$\frac{(10n^2)^2}{256} : \left(\frac{5n^2}{-4}\right)^3 : \frac{5n^2}{(8n^3)^2}$$

$$-\frac{a^2}{x} : \left(-\frac{x}{a}\right)^3 : \left(\frac{a}{x^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$$

(ج = ۲۱۰)

$$\frac{2a-1}{15ax^2} : \frac{6a-3}{5x}$$

$$\frac{1-x^2}{x^2-16} : \frac{x-1}{x^2-7x+12}$$

$$\frac{a^3-a^2-12a}{a^2-4a+4} : \frac{3a^2+a^3}{4-a^2}$$

## هـ ـ مثال های ترکیبی

مثال ۱ ـ حاصل عبارت $\left(3-\frac{1}{a+2}\right) : \left(3-\frac{4}{a+3}\right)$ رابدست آورید

اول حاصل هر پرانتز را پیدا میکنیم از نیقرار:

$$3-\frac{1}{a+2} = \frac{3a+6-1}{a+2} = \frac{3a+5}{a+2}$$

$$3-\frac{4}{a+3} = \frac{3a+9-4}{a+3} = \frac{3a+5}{a+3}$$

پس از آن این دو حاصل را برهم تقسیم مینمائیم:

$$\frac{3a+5}{a+2} : \frac{3a+5}{a+3} = \frac{3a+5}{a+2} \times \frac{a+3}{3a+5} = \frac{a+3}{a+2}$$

## تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\left(x+\frac{a^2}{a+x}\right) : \left(\frac{2ax+x^2}{a+x}-a\right)$$

$$\left(x-3-\frac{28}{x}\right) : \left(1-\frac{1}{x}-\frac{20}{x^2}\right)$$

$$\left(a-\frac{3}{4a}+1\right) : \frac{2a+3}{2a+1}\left(\frac{3}{4a^2-1}+2\right)$$

$$\frac{2x-6}{x+3} : \left(2+\frac{15}{4x^2-16}\right)\left(\frac{7}{x-3}+2\right)$$

$$\left[\left(\frac{a}{n}-\frac{n}{a}\right):\frac{a+n}{2a^2-2an}\right]\cdot\frac{nx}{2(a-n)^2}$$

$$\frac{9n^2+9n}{9n^2-4}:\frac{n+1}{3n-2}\left(3n+4+\frac{4}{3n}\right)$$

$$\frac{4-4n^4}{4n^4-25n^2}:\frac{2n^2+2}{2n-5}\left(2n^2+\frac{8n^2-n^3}{n-1}\right)$$

$$(3n^3-75n):\left(2+\frac{11}{n}+\frac{5}{n^2}\right)\left(6n-11-\frac{10}{n}\right)$$

$$\left(\frac{-6a}{a^2-4}+\frac{3}{2-a}\right):\frac{3}{a^2-a-6}$$

$$\left(4-\frac{6}{a+1}\right):\left(8-\frac{4a-8}{a^2-1}\right)$$

$$\left(\frac{2x}{x-2}-\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{3x}{x-3}-\frac{2x}{x-2}\right)$$

$$\left(\frac{8}{m-x}-\frac{4}{x^2-m^2}\right):\left(\frac{1}{m-x}-\frac{1}{m+x}\right)$$

مثال ۴- عبارت

$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$$

ساده کنید

از تقسیم حاصل $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$ بر حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$ نتیجه بدست میآید.

ونیز میتوان برای سادگی در عمل برخه شمار و برخه نام عبارت بالا را در کوچکترین مضرب برخه نامهای جزء که مساوی $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ است ضرب نمود تا چنین شود:

$$\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(a^2+b^2)-(a-b)^2(a^2+b^2)}$$

که پس از تجزیه بحاصل ضرب سازه‌ها و بنا بر شماره ۱۱۳ چنین میشود

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]}$$

و یا

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\cdot 4ab}=\frac{ab}{a^2+b^2}$$

یعنی عبارت داده شده متحد است با $\frac{ab}{a^2+b^2}$

مثال ۲ - حاصل این عبارت را بدست آورید

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}}$$

برخه شمار و برخه نام این برخه را در $xy$ کوچکترین مضرب برخه‌نامهای جزء ضرب میکنیم

بنا بر این خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}}=\frac{x^2-y^2}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{2}{3}+1}$$

$$\frac{\frac{6}{x}-5+x}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{6}{x^2}} \qquad \frac{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{11}{12}-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}} \qquad \frac{x-3-\frac{30}{x-2}}{x-1-\frac{20}{x-2}}$$

$$\frac{1-\frac{a^3}{b^3}}{\frac{1}{b^2}-\frac{a}{b^3}}$$

$$\frac{1}{4-\frac{2}{x+\frac{x}{1-x}}}$$

$$2+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{3}}}$$

$$1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$$

$$a-\frac{a-2b}{2-\frac{a+b}{a-b}}$$

$$x-\frac{y}{1+\frac{1}{1+\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{\frac{2}{b+c}-\frac{1}{b}}{c+\frac{bc}{c-2b}}+\frac{\frac{2}{b+c}-\frac{1}{c}}{b+\frac{bc}{b-2c}}$$

$$\frac{\frac{2yz}{y+z}-y}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y-2z}}+\frac{\frac{2yz}{y+z}-z}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z-2y}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{y-\frac{x}{1+\frac{x}{y-x}}}-\frac{y^2-x^2}{y+\frac{x}{1-\frac{x}{x+y}}}$$

$$\frac{a+2-\frac{1}{a+2}}{a+2-\frac{4}{a+5}}:\frac{a+4-\frac{1}{a+4}}{a+4+\frac{1}{a+4}}$$

$$\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$$

$$\frac{m^2n - mn^2}{a^2b - ab^2} : \frac{m^3n^2 - m^2n^3}{a^3b^2 - a^2b^3}$$

$$\frac{\left(3a + 4 - \frac{4}{3a}\right)\frac{3a-2}{a-1}}{\frac{9a^2-4}{9a^2+9a}}$$

$$\frac{1 + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}}{1 - \frac{x^2 + y - z^2}{2xy}}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{y}+2}{\frac{x}{y}+1} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x}{y} + 2 - \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-a}{1+a}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} : \frac{1+ab}{a-b}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x - \frac{1}{x}} : \frac{1}{1+x}$$

$$\left(2 - \frac{3n}{m} + \frac{9n^2 - 2m^2}{m^2 + 2mn}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m - 2n - \frac{4n^2}{m+n}}\right)$$

۲- مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{80000}$ است یعنی هر ۸۰ کیلومتر در نقشه یک متر نمایش داده میشود حال اگر فاصله دو شهر ه کیلومتر باشد در این نقشه چقدر فاصله خواهند داشت ؟ و بالعکس اگر فاصله دو شهر در این نقشه ط میلی‌متر باشد حقیقةً فاصله این دو شهر چقدر است ؟ ( حالت مخصوص ۱۶۰ = ه و ط = ۵۰ )

۳- $\frac{3}{4}$ پارچه‌ای ه ریال ارزش دارد تعیین کنید ارزش $\frac{5}{8}$ آنرا ( حالت مخصوص ه = ۱۲۰ )

۴- دو کارگر کاری را در ه روز انجام میدهند اولی به تنهائی آنرا در ط روز تمام میکند معلوم کنید کارگر دوم به تنهائی در یک روز چقدر کار را تمام میکند ؟ ( حالت مخصوص ه = ۱۲ و ط = ۱۸ )

۵- فاصله دو شهر ه کیلومتر است ترن این فاصله را با تندی متوسط ۴۵ کیلومتر در ساعت می‌پیماید اگر فرض کنیم ماشین در راه بین دو شهر مدت نیم ساعت توقف کند پس از چه مدتی از شهر اول بشهر دوم میرسد ؟

۶- تندی متوسط ماشینی در پیمودن راهی ه کیلومتر در ساعت است یک قسمت این راه را با تندی ط کیلومتر در ساعت پیموده حساب کنید تندی ماشین را در بقیه راه .

۷- یک دسته هواپیما باید در ساعت ۱۷ بر فراز شهری که بفاصله ه کیلومتر است آشکار شوند ؛ اگر تندی متوسط آنها ط کیلومتر در ساعت باشد چه ساعتی باید حرکت کنند ؟ ( حالت مخصوص ۷۰۰ = ه

۸ - در مسئله پیش فرض میکنیم $a = ۶۰۰$ کیلومتر و $b = ۲۰۰$ کیلومتر در ساعت باشد اگر هوا منقلب بوده و باد مخالفی به تندی ۴ کیلومتر در ساعت بوزد چند دقیقه زودتر باید حرکت کنند تا در موقع مقرر بشهر منظور برسند؟

۹- شخصی $a$ ریال بدهکار است $\frac{1}{4}$ بدهی خود را میپردازد و پس از مدتی مجبور میشود که مبلغی مساوی $\frac{1}{5}$ آنچه که بدهکار است قرض کند معلوم کنید بدهی او چه مبلغ میشود و در نتیجه این دو عمل چه مبلغی از بدهی خود را ادا کرده است؟ (حالت مخصوص $a = ۱۵۰۰$)

۱۰- بنائی میتواند به تنهائی کار اطاقی را $a$ روز بسازد و بنای دیگر به تنهائی همان کار را $b$ روزه تحویل میدهد. پس از اینکه بنای دوم یک روز کار کرد هر دو را با هم بکار میگمارند ساختمان اطاق چند روزه تمام میشود؟ (حالت مخصوص $a = ۴$ و $b = ۶$)

۱۱- بنا بدستور مهندس ساختمان $a$ متر مکعب مخلوط ماسه و سیمان به نسبت $\frac{1}{3}$ تهیه شده (یعنی در سه قسمت مخلوط یک قسمت سیمان و دو قسمت ماسه باشد) اتفاقاً مهندس تغییر رای داده میخواهد بنسبت $\frac{1}{5}$ باشد چه مقدار ماسه باید به مخلوط افزوده شود؟ (حالت مخصوص $a = ۲$)

۱۲- در ایستگاه بنزین فروشی برای پر کردن مخزن بنزینی دو دستگاه لوله موجود است اولی مخزن را به تنهائی در سه ربع ساعت پر میکند و برای مواقع عادی است دومی آنرا در یکساعت و ربع پر میکند و در مواقعی که مصرف بنزین زیاد است میخواهند هر دو دستگاه را بکار برند معلوم کنید پر کردن مخزن چه اندازه طول خواهد کشید؟

خط محمد [illegible]